Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 17-07-2019

Esercizio 1. (10 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \ \arctan(1 - y^2) \\ \dot{y} = y \ \arctan(x^2 - 1) \end{cases}$$

(i) studiare il ritratto di fase;
(ii) dire se l'insieme $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \, , -1 \leq y \leq 1\}$ è positivamente invariante, e determinare l'insieme ω-limite dei punti di U.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x\Big(\log_2(1 + x^2 + y^2) + \mu + \sqrt{x^2 + y^2}\Big) - y \\ \dot{y} = y\Big(\log_2(1 + x^2 + y^2) + \mu + \sqrt{x^2 + y^2}\Big) + x \end{cases}$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.
(i) Disegnare il ristratto di fase al variare di μ.
(ii) Fissato $\mu = -2$, indicando con $\Big(x(t, (1, 0)), y(t, (1, 0))\Big)$ la soluzione del sistema con condizione iniziale $(x_0, y_0) = (1, 0)$ al tempo t, determinare $\Big(x(3\pi, (1, 0)), y(3\pi, (1, 0))\Big)$.

Esercizio 3. (10 punti) Dato l'intervallo $[0, 1]$, si consideri la partizione $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3\}$ con $J_1 = [0, \frac{1}{3}]$, $J_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ e $J_3 = [\frac{2}{3}, 1]$, e la funzione $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x \, , & x \in J_1 \\ \frac{2}{3} - x \, , & x \in J_2 \\ x - \frac{2}{3} \, , & x \in J_3 \end{cases}$$

(i) Costruire l'f-grafo di $\mathcal{J}$.

(ii) Dire se esiste un'orbita periodica di periodo minimo 5.

(iii) Dire se esiste un'orbita periodica di periodo minimo 20.

Svolgimento

Esercizio 1. *Dato il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \arctan(1-y^2) \\ \dot{y} = y \arctan(x^2-1) \end{cases}$$

(i) studiare il ritratto di fase;

Cerchiamo innanzitutto i punti fissi del sistema. Si tratta delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \arctan(1-y^2) = 0 \\ y \arctan(x^2-1) = 0 \end{cases}$$

che sono i punti $Q_1 = (0,0)$, $Q_2 = (-1,-1)$, $Q_3 = (-1,1)$, $Q_4 = (1,-1)$ e $Q_5 = (1,1)$.

La matrice Jacobiana del campo di vettori è data da

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} -\arctan(1-y^2) & \frac{2xy}{1+(1-y^2)^2} \\ \frac{2xy}{1+(x^2-1)^2} & \arctan(x^2-1) \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$JF(Q_1) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

gli autovalori sono entrambi negativi e uguali, quindi Q_1 è un nodo stabile, di tipo stella nella linearizzazione;

$$JF(Q_2) = JF(Q_5) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante negativo. Dunque la matrice ha due autovalori reali discordi, e quindi Q_2 e Q_5 sono punti di sella;

$$JF(Q_3) = JF(Q_4) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante negativo. Dunque la matrice ha due autovalori reali discordi, e quindi Q_3 e Q_4 sono punti di sella.

Per disegnare il ritratto di fase è utile studiare il segno del campo vettoriale. Andiamo inoltre alla ricerca di rette invarianti. Si osserva innanzitutto che $\{x=0\}$ e $\{y=0\}$ sono invarianti, e inoltre per $a, b \neq 0$ si ha

$$\frac{d}{dt}(ax+by)|_{ax+by=0} = \Big(-ax \arctan(1-y^2) + by \arctan(x^2-1) \Big)|_{ax+by=0} =$$

$$= by\Big(\arctan(1-y^2) + \arctan\left(\frac{b^2}{a^2}y^2 - 1 \right) \Big) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = a^2$$

Quindi $\{y = \pm x\}$ sono altre due rette invarianti.

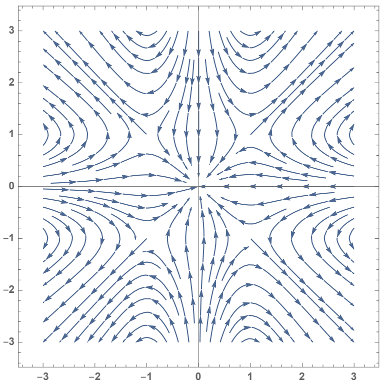


Figure 1: Il ritratto di fase dell'es. 1

Per quanto riguarda l'esistenza di orbite periodiche, possiamo usare l'indice di Poincaré per osservare innanzitutto che un'orbita periodica deve circondare necessariamente Q_1. Ma l'esistenza delle due rette invarianti $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ ne escludono l'esistenza.

In conclusione ritroviamo il ritratto di fase di figura 1.

(ii) dire se l'insieme $U = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, -1 \le x \le 1 \, , \, -1 \le y \le 1\big\}$ *è positivamente invariante, e determinare l'insieme* ω*-limite dei punti di* U*.*

I vertici del quadrato U sono punti fissi, e dunque i vertici sono ω-limite di loro stessi. Inoltre il campo di vettori è rivolto verso l'interno di U lungo tutti i punti del bordo diversi dai vertici. Quindi l'insieme U è positivamente invariante.

Infine, tutte le orbite con condizione iniziale in U, diversa dai vertici, deve restare dentro U. Poiché l'ω-limite ha la proprietà di essere un insieme chiuso e invariante, e l'unico insieme chiuso e invariante nella parte interna di U è il punto fisso Q_1, ne segue che Q_1 è necessariamente l'insieme ω-limite di ogni punto di U diverso dai vertici.

Esercizio 2. *Si consideri il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = x\Big(\log_2(1 + x^2 + y^2) + \mu + \sqrt{x^2 + y^2}\Big) - y \\ \dot{y} = y\Big(\log_2(1 + x^2 + y^2) + \mu + \sqrt{x^2 + y^2}\Big) + x \end{cases}$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$*.*
(i) Disegnare il ristratto di fase al variare di μ*.*

Riscrivendo il sistema in coordinate polari, quindi con

$$\dot{\rho} = \frac{x\,\dot{x} + y\,\dot{y}}{\rho} \qquad \dot{\theta} = \frac{-\dot{x}\,\sin\theta + \dot{y}\,\cos\theta}{\rho}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho\,\Big(\log_2(1 + \rho^2) + \mu + \rho\Big) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

in cui le equazioni differenziali per ρ e θ sono disaccoppiate, e dunque il sistema è semplice da studiare. In particolare, si osserva che per la variabile θ la soluzione è

$$\theta(t) = t + \theta(0)\,,$$

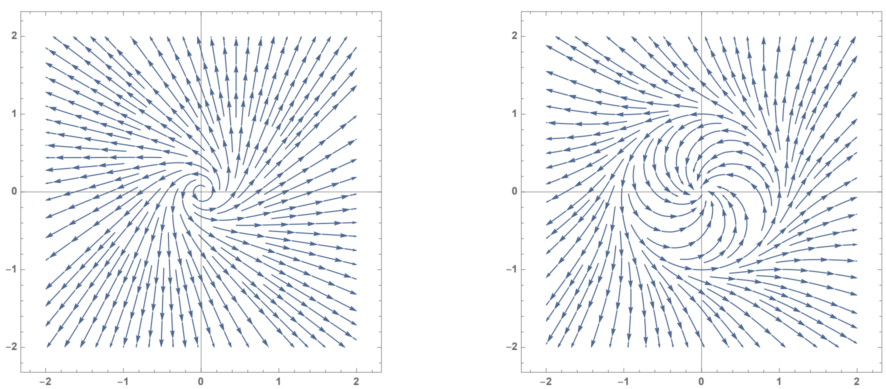
mentre il comportamento della soluzione per la variabile ρ dipende dal segno di $\dot{\rho}$, che a sua volta dipende dal valore di μ.

Se $\mu \geq 0$, allora $\dot{\rho} \geq 0$ per ogni $\rho \in [0, +\infty)$, e $\dot{\rho} = 0$ se e solo se $\rho = 0$. Dunque, abbiamo il punto fisso $(0, 0)$, che è un fuoco instabile, e tutte le altre condizioni iniziali (x_0, y_0) portano a una soluzione che per $t \to +\infty$ tende all'infinito con moto a spirale, e per $t \to -\infty$ tende a $(0, 0)$. Si ottiene quindi il ritratto di fase in figura 2a.

Se invece $\mu < 0$, allora $\dot{\rho}$ cambia segno. Esiste infatti $\bar{\rho}(\mu)$ per cui

$$\rho\left(\log_2(1+\rho^2) + \mu + \rho\right) \begin{cases} < 0\,, & \text{se } \rho \in (0, \bar{\rho}(\mu)) \\ = 0\,, & \text{se } \rho = \bar{\rho}(\mu) \\ > 0\,, & \text{se } \rho > \bar{\rho}(\mu) \end{cases}$$

Quindi $(0, 0)$ è un punto fisso di tipo fuoco e asintoticamente stabile, esiste poi un'orbita periodica instabile per $\rho = \bar{\rho}(\mu)$, e tutte le condizioni iniziali con $\rho_0 > \bar{\rho}(\mu)$ portano a una soluzione che per $t \to +\infty$ tende all'infinito con moto a spirale. Si ottiene quindi il ritratto di fase in figura 2b.



(a) Caso $\mu \geq 0$ (b) Caso $\mu < 0$

Figure 2

(ii) Fissato $\mu = -2$, indicando con $\Big(x(t, (1, 0)), y(t, (1, 0))\Big)$ la soluzione del sistema con condizione iniziale $(x_0, y_0) = (1, 0)$ al tempo t, determinare $\Big(x(3\pi, (1, 0)), y(3\pi, (1, 0))\Big)$.

Nel caso particolare $\mu = -2$, osserviamo innanzitutto che siamo nella situazione in cui esiste un'orbita periodica instabile, e possiamo facilmente ricavare che $\bar{\rho}(-2) = 1$. Quindi la condizione iniziale $(x_0, y_0) = (1, 0)$ si trova esattamente sull'orbita periodica. Quindi, in coordinate polari, stiamo cercando la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho \Big(\log_2(1+\rho^2) + \mu + \rho \Big) \\ \dot{\theta} = 1 \\ \rho_0 = 1 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

che è quindi

$$\rho(t) = 1 \qquad \theta(t) = t$$

Per $t = 3\pi$ si ha $(\rho(3\pi), \theta(3\pi)) = (1, 3\pi)$, e quindi $\Big(x(3\pi, (1,0)), y(3\pi, (1,0))\Big) = (-1, 0)$.

Esercizio 3. *Dato l'intervallo* $[0,1]$, *si consideri la partizione* $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3\}$ *con* $J_1 = [0, \frac{1}{3}]$, $J_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ *e* $J_3 = [\frac{2}{3}, 1]$, *e la funzione* $f : [0,1] \to [0,1]$ *definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x\,, & x \in J_1 \\ \frac{2}{3} - x\,, & x \in J_2 \\ x - \frac{2}{3}\,, & x \in J_3 \end{cases}$$

(i) Costruire l'f-grafo di $\mathcal{J}$.

Disegniamo innanzitutto il grafico di f, ottenendo quello nella figura 3.

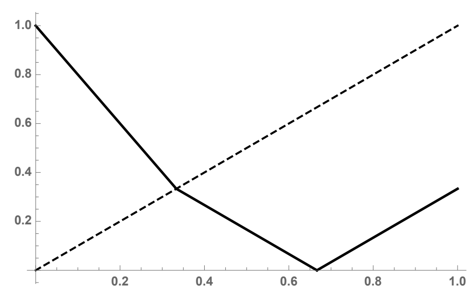


Figure 3: Il grafico di f.

Si ottiene quindi che J_1 ricopre J_2 e J_3, mentre J_2 ricopre J_1, e anche J_3 ricopre J_1. In definitiva si ottiene l'f-grafo in figura 4.

(ii) Dire se esiste un'orbita periodica di periodo minimo 5.

Non possono esistere orbite di periodo dispari, come si vede usando l'f-grafo, o semplicemente ragionando sul fatto che, a parte il punto fisso, ogni orbita da J_1 può tornare in J_1 solo con un numero pari di iterazioni, e lo stesso vale per J_2 e J_3.

(iii) Dire se esiste un'orbita periodica di periodo minimo 20.

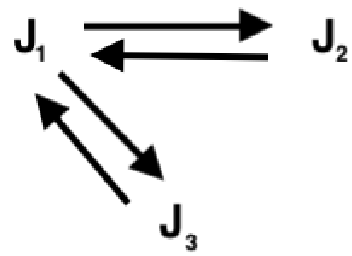


Figure 4: L'f-grafo di $\mathcal{J}$.

Essendo la funzione f continua su $[0, 1]$ possiamo applicare il Teorema di Sharkovskii. In particolare, usando l'f-grafo, otteniamo l'esistenza del cammino ammissibile

$$J_1\, J_2\, J_1\, J_3\, J_1\, J_2\, J_1$$

e quindi otteniamo l'esistenza di un punto $x \in J_1$ tale che $f^6(x) = x$. Dal tipo di cammino trovato, è immediato ottenere che x rappresenta un punto periodico di periodo minimo 6. Quindi per il Teorema di Sharkovskii, esiste un'orbita periodica di periodo minimo n per ogni $n \prec 6$ nell'ordinamento di Sharkovskii. Poiché 6 è il numero pari più grande in questo ordinamento, abbiamo dimostrato l'esistenza di orbite periodiche di periodo minimo n, per ogni numero pari n, e dunque anche per $n = 20$.