Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito A del 17-07-2018

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^3 - y^3$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

iii) determinare massimo e minimo di f su

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1 \right\}$$

Esercizio 2. (12 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx \, dy$$

dove $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq x \leq 1 \, , \, x^2 + y^2 - 2y \leq 3 \, , \, y \geq -\sqrt{1 - x^2} \right\}$.

Esercizio 3. (8 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^4 - 2x^3 - y^2 + z^2 - 4z + 4 = 0 \right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (2 \, , 2 \, , 0)$;

ii) determinare, se possibile, una parametrizzazione locale di Σ in un intorno del punto $Q = (1 \, , 0 \, , 1)$ e in un intorno del punto $R = (0 \, , 0 \, , 2)$.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^3 - y^3$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella. Dire se la funzione ammette massimo assoluto e minimo assoluto;

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x, y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 2x - 3x^2 = 0 \\ 4y - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione si riscrive come $x(2-3x) = 0$, e ha dunque soluzioni $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$. La seconda equazione si riscrive come $y(4 - 3y) = 0$, e ha dunque soluzioni $y = 0$ e $y = \frac{4}{3}$. Dunque i punti critici risultano essere

$$C_1 = (0, 0) \qquad C_2 = \left(0\,,\,\frac{4}{3}\right) \qquad C_3 = \left(\frac{2}{3}\,,\,0\right) \qquad C_4 = \left(\frac{2}{3}\,,\,\frac{4}{3}\right)$$

Per caratterizzare i punti critici andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione differenziabile due volte su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 6x & 0 \\ 0 & 4 - 6y \end{pmatrix}.$$

Sostituendo i punti critici troviamo:

$$Hf(C_1) = Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_1) = 8 > 0$, e $\text{traccia}(Hf(C_1)) = 6 > 0$, dunque C_1 è punto di minimo locale;

$$Hf(C_2) = Hf\left(0\,,\,\frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_2) = -8 < 0$, dunque C_2 è punto di sella;

$$Hf(C_3) = Hf\left(\frac{2}{3}\,,\,0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_3) = -8 < 0$, dunque C_3 è punto di sella;

$$Hf(C_4) = Hf\left(\frac{2}{3}\,,\,\frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

si ha det $Hf(C_1) = 8 > 0$, e traccia$(Hf(C_1)) = -6 < 0$, dunque C_4 è punto di massimo locale.

ii) determinare massimo e minimo di f su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\right\}$$

L'insieme Ω è l'ellisse di centro $(0, 0)$ e semiassi $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

Abbiamo visto che f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. I punti critici liberi sono quattro, ma solo $C_1 = (0, 0)$ e $C_3 = (\frac{2}{3}, 0)$ sono interni a Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Possiamo non considerare spigoli sul bordo dell'insieme, scrivendo il bordo come

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{2} + y^2 = 1\right\}$$

quindi insieme di livello della funzione differenziabile $G(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2$. Il gradiente di G non si annulla su Γ, e possiamo quindi applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} 2x - 3x^2 = \lambda\, x \\ 4y - 3y^2 = \lambda\, 2y \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$$

Studiando la prima equazione otteniamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3y^2 = \lambda\, 2y \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ \lambda = 2 - 3x \\ 4y - 3y^2 = \lambda\, 2y \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dal primo sotto-sistema si ottengono i primi due punti critici vincolati

$$Q_1 = (0, -1) \qquad Q_2 = (0, 1)$$

Nel secondo sotto-sistema, sostituendo la seconda nella terza si trova

$$4y - 3y^2 = 2y\,(2 - 3x)$$

da cui si trovano le soluzioni $y = 0$ e $y = 2x$. Usando la condizione sul vincolo $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, si trovano quindi gli altri punti critici vincolati

$$Q_3 = (-\sqrt{2}, 0) \quad Q_4 = (\sqrt{2}, 0) \quad Q_5 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\,, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \quad Q_6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\,, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C_1) = 0 \quad f(C_3) = \frac{4}{27} \quad f(Q_1) = 3 \quad f(Q_2) = 1 \quad f(Q_3) = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$f(Q_4) = 2 - 2\sqrt{2} \quad f(Q_5) = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{2} \quad f(Q_6) = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Dunque il massimo di f è $2 + 2\sqrt{2}$ e il minimo è $2 - 2\sqrt{2}$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1\,,\, x^2 + y^2 - 2y \le 3\,,\, y \ge -\sqrt{1-x^2}\right\}$.

Riscriviamo innanzitutto la terza condizione come

$$y \ge -\sqrt{1-x^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ y < 0 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$$

Osservando che $x^2 \le 1$ è già garantito dalla prima condizione, riscriviamo $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ con

$$\Omega_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1\,,\, x^2 + y^2 - 2y \le 3\,,\, y \ge 0\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1\,,\, x^2 + y^2 - 2y \le 3\,,\, y < 0\,,\, x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

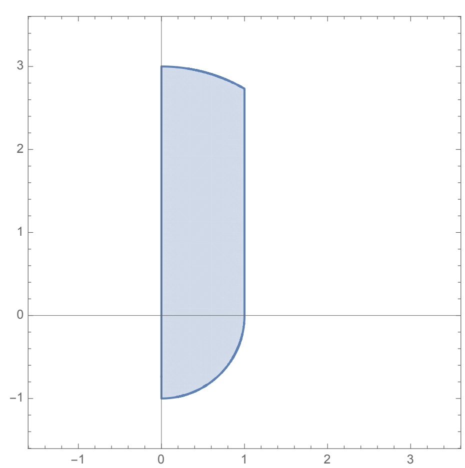

Figure 1: L'insieme Ω.

È preferibile svolgere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho, \theta)| = \rho\,.$$

Ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx\, dy = \iint_S \sin\theta\, \cos\theta\, d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo $S = S_1 \cup S_2$ con

$$S_1 = \Big\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, 0 \le \rho\cos\theta \le 1\,, \rho^2 - 2\rho\sin\theta \le 3\,,\ \rho\sin\theta \ge 0\Big\}$$

$$S_2 = \Big\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, 0 \le \rho\cos\theta \le 1\,, \rho^2 - 2\rho\sin\theta \le 3\,,\ \rho\sin\theta < 0\,,\ \rho^2 \le 1\Big\}$$

Dalla prima condizione si ricava $\cos\theta > 0$, dunque otteniamo

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad 0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta}\,.$$

La seconda condizione la trattiamo come una disequazione di secondo grado in ρ, da cui si trova che ρ è compreso tra le due radici, ossia

$$\sin\theta - \sqrt{\sin^2\theta + 3} \le \rho \le \sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 3}\,,$$

e poiché la radice più piccola è negativa per ogni valore di θ, otteniamo

$$0 \le \rho \le \sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 3}\,.$$

Per S_1 la terza condizione è equivalente a $\theta \in [0,\pi]$, e dunque mettendola insieme alle altre due condizioni si trova

$$S_1 = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,,\ \rho \le \frac{1}{\cos\theta}\,,\ \rho \le \sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 3}\right\}\,.$$

Per S_2 la terza e la quarta condizione sono equivalenti a $\theta \in [-\pi, 0]$ e $\rho \le 1$. Osservando che $\frac{1}{\cos\theta} \ge 1$ per ogni θ, e che

$$\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 3} \ge 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin^2\theta + 3 \ge \sin^2\theta + 1 - 2\sin\theta \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \ge -\sin\theta$$

ancora per ogni θ, per l'insieme S_2 ha importanza per ρ solo la quarta condizione, e dunque

$$S_2 = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0\,,\ 0 \le \rho \le 1\right\}$$

L'insieme S_2 è un rettangolo, dunque già in forma di insieme semplice, mentre per scrivere S_1 come insieme semplice rappresentiamolo in figura. Si trova la figura 2 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo considerare la soluzione in $[0, \frac{\pi}{2}]$ di

$$\frac{1}{\cos\theta} = \sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 3}$$

che indichiamo con θ_1.

Possiamo dunque scrivere S_1 come unione di due insiemi semplici,

$$S_1 = \left\{(\rho,\theta) \,:\, 0 \le \theta \le \theta_1\,,\ 0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta}\right\} \quad \bigcup \quad \left\{(\rho,\theta) \,:\, \theta_1 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \le \rho \le \sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 3}\right\}\,.$$

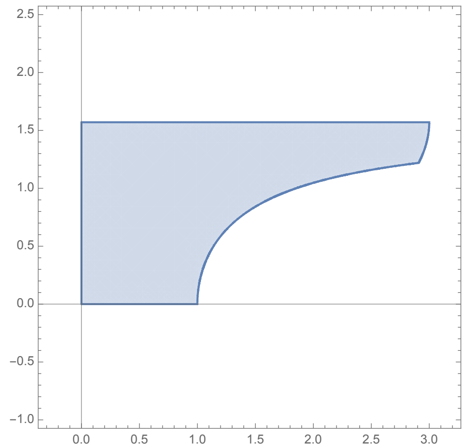

Figure 2: L'insieme S_1.

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy = \iint_S \sin\theta\,\cos\theta\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \iint_{S_1} \sin\theta\,\cos\theta\,d\rho\,d\theta + \iint_{S_2} \sin\theta\,\cos\theta\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\theta_1} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \sin\theta\,\cos\theta\,d\rho\right) d\theta + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sin\theta+\sqrt{\sin^2\theta+3}} \sin\theta\,\cos\theta\,d\rho\right) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\int_0^1 \sin\theta\,\cos\theta\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\theta_1} \sin\theta\,d\theta + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2\theta\,\cos\theta + \sin\theta\,\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta+3}\right) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\theta\,\cos\theta\,d\theta =$$

$$= 1 - \cos\theta_1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sin^3\theta_1 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3}(\sin^2\theta_1+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\,.$$

Per il valore di θ_1, possiamo risolvere l'equazione di sopra, da cui si trova

$$\sin\theta_1 = \left(\frac{8+2\sqrt{3}}{13}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \cos\theta_1 = \left(\frac{5-2\sqrt{3}}{13}\right)^{\frac{1}{2}}$$

oppure si trovano le coordinate del punto P di intersezione tra le curve $x = 1$ e $x^2+y^2-2y = 3$ con $y4 > 0$, ossia $P = (1, 1+\sqrt{3})$, da cui

$$\sin\theta_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{(5+2\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}} \qquad \cos\theta_1 = \frac{1}{(5+2\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}}$$

che rappresenta un modo diverso di scrivere gli stessi valori.

Dunque abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy = \frac{7}{2} - \frac{1}{(5+2\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3}\left(\frac{8+2\sqrt{3}}{13}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{47+2\sqrt{3}}{13}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^4 - 2x^3 - y^2 + z^2 - 4z + 4 = 0\big\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (2\,,\,2\,,\,0)$;

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione di classe C^1

$$F(x, y, z) = x^4 - 2x^3 - y^2 + z^2 - 4z + 4$$

dunque certamente esiste il piano tangente nei punti di Σ in cui non si annulla il gradiente di F. Abbiamo

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 6x^2 \\ -2y \\ 2z - 4 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \nabla F(P) = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il piano tangente a Σ esiste certamente in P, e la sua equazione cartesiana è

$$8(x - 2) - 4(y - 2) - 4z = 0\,.$$

ii) determinare, se possibile, una parametrizzazione locale di Σ in un intorno del punto $Q = (1\,,\,0\,,\,1)$ e in un intorno del punto $R = (0\,,\,0\,,\,2)$.

Per il Teorema delle Funzioni Implicite, siamo certi di poter trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione in un intorno dei punti in cui non si annulla il gradiente di F. Calcoliamo quindi

$$\nabla F(Q) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(R) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che certamente è possibile trovare la parametrizzazione richiesta in un intorno del punto Q, mentre non ne siamo certi in un intorno del punto R.

Nel caso del punto Q, poiché

$$\frac{\partial F}{\partial x}(Q) \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(Q) \neq 0\,,$$

possiamo scegliere se applicare il teorema rispetto alla x o rispetto alla z.

Se scegliamo di applicarlo rispetto alla x, otteniamo che esistono un intorno $U(0, 1)$, un intorno $V(1)$ ed una funzione $g(y, z) : U \to V$ tale che $g(0, 1) = 1$ e $F(g(y, z), y, z) = 0$ per ogni $(y, z) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione g. Dall'equazione

$$F(g(y, z), y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^4(y, z) - 2g^3(y, z) - y^2 + z^2 - 4z + 4 = 0$$

non risulta agevole ottenere l'espressione esplicita della funzione $g(y, z)$.

Se scegliamo di applicare invece il Teorema delle Funzioni Implicite rispetto alla z, otteniamo che esistono un intorno $U(1, 0)$, un intorno $V(1)$ ed una funzione $h(x, y) : U \to V$ tale che $h(1, 0) = 1$

e $F(x, y, h(x, y)) = 0$ per ogni $(x, y) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione h. Dall'equazione

$$F(x, y, h(x, y)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 2x^3 - y^2 + h^2(x, y) - 4h(x, y) + 4 = 0$$

con la condizione $h(1, 0) = 1$, troviamo

$$h(x, y) = 2 - \sqrt{-x^4 + 2x^3 + y^2}$$

La parametrizzazione locale di Σ è quindi data da

$$\sigma(x, y) = (x,\, y,\, h(x, y))$$

con $(x, y) \in U$ e $h(x, y)$ come sopra.

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito B del 17-07-2018

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x^3 - y^3$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

iii) determinare massimo e minimo di f su

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}$$

Esercizio 2. (12 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_{\Omega} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx \, dy$$

dove $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq x \leq 1 \, , \, x^2 + y^2 - 2y \leq 3 \, , \, y \geq -\sqrt{1 - x^2} \right\}$.

Esercizio 3. (8 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 - 4x + y^4 - 2y^3 - z^2 + 4 = 0 \right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (0 \, , \, 2 \, , \, 2)$;

ii) determinare, se possibile, una parametrizzazione locale di Σ in un intorno del punto $Q = (1 \, , \, 1 \, , \, 0)$ e in un intorno del punto $R = (2 \, , \, 2 \, , \, 0)$.

Svolgimento

Esercizio 1. Invertire le variabili x e y dell'Esercizio 1 del Compito A.

Esercizio 2. Vedi Esercizio 2 del Compito A.

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 - 4x + y^4 - 2y^3 - z^2 + 4 = 0\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ *nel punto* $P = (0\,,\,2\,,\,2)$*;*

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione di classe C^1

$$F(x, y, z) = x^2 - 4x + y^4 - 2y^3 - z^2 + 4$$

dunque certamente esiste il piano tangente nei punti di Σ in cui non si annulla il gradiente di F. Abbiamo

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 4 \\ 4y^3 - 6y^2 \\ -2z \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \nabla F(P) = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il piano tangente a Σ esiste certamente in P, e la sua equazione cartesiana è

$$-4x + 8(y - 2) - 4(z - 2) = 0\,.$$

ii) determinare, se possibile, una parametrizzazione locale di Σ *in un intorno del punto* $Q = (1\,,\,1\,,\,0)$ *e in un intorno del punto* $R = (2\,,\,2\,,\,0)$.

Per il Teorema delle Funzioni Implicite, siamo certi di poter trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione in un intorno dei punti in cui non si annulla il gradiente di F. Calcoliamo quindi

$$\nabla F(Q) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(R) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che certamente è possibile trovare la parametrizzazione richiesta sia in un intorno del punto Q sia in un intorno del punto R.

Nel caso del punto Q, poiché

$$\frac{\partial F}{\partial x}(Q) \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(Q) \neq 0\,,$$

possiamo scegliere se applicare il teorema rispetto alla x o rispetto alla y.

Se scegliamo di applicarlo rispetto alla x, otteniamo che esistono un intorno $U(1,0)$, un intorno $V(1)$ ed una funzione $g(y,z): U \to V$ tale che $g(1,0) = 1$ e $F(g(y,z),y,z) = 0$ per ogni $(y,z) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione g. Dall'equazione

$$F(g(y,z),y,z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^2(y,z) - 4g(y,z) + y^4 - 2y^3 - z^2 + 4 = 0$$

con la condizione $g(1,0) = 1$, troviamo

$$g(y,z) = 2 - \sqrt{-y^4 + 2y^3 + z^2}$$

La parametrizzazione locale di Σ è quindi data da

$$\sigma(y,z) = (g(y,z),\, y,\, z)$$

con $(y,z) \in U$ e $g(y,z)$ come sopra.

Se scegliamo di applicare invece il Teorema delle Funzioni Implicite rispetto alla y, otteniamo che esistono un intorno $U(1,0)$, un intorno $V(1)$ ed una funzione $h(x,z): U \to V$ tale che $h(1,0) = 1$ e $F(x,h(x,z),z) = 0$ per ogni $(x,z) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione h. Dall'equazione

$$F(x,h(x,z),z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + h^4(x,z) - 2h^3(x,z) - z^2 + 4 = 0$$

non risulta agevole ottenere l'espressione esplicita della funzione $h(x,z)$.

Nel caso del punto R, poiché

$$\frac{\partial F}{\partial y}(R) \neq 0$$

è l'unica derivata parziale che non si annulla, possiamo applicare il teorema solo rispetto alla y.

Quindi otteniamo che esistono un intorno $U(2,0)$, un intorno $V(2)$ ed una funzione $h(x,z): U \to V$ tale che $h(2,0) = 2$ e $F(x,h(x,z),z) = 0$ per ogni $(x,z) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione h. Dall'equazione

$$F(x,h(x,z),z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + h^4(x,z) - 2h^3(x,z) - z^2 + 4 = 0$$

non risulta tuttavia agevole ottenere l'espressione esplicita della funzione $h(x,z)$. Dunque la parametrizzazione è del tipo

$$\sigma(x,z) = (x,\, h(x,z),\, z)$$

con $(x,z) \in U$ e $h(x,z)$ che rimane implicita.