Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 16-09-2015

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = e^{x^3+xy}$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{|xy|}}$$

Esercizio 2. (14 punti) Dato l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,,\, y \le \frac{1}{2}\right\}\,,$$

i) utilizzare le coordinate polari per calcolare l'area di Ω svolgendo l'integrale (*Suggerimento:* può essere utile conoscere la derivata di $g(\theta) = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$)

ii) determinare massimo e minimo su Ω della funzione

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

Esercizio 3. (8 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y^3+x^2y-2x}{x^2+y^2} \\ \frac{x^3+xy^2+2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

i) studiarne il dominio, e dire se è irrotazionale e conservativo;

ii) calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}$ lungo (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(2 + \frac{1}{2}\cos t\,,\, \sin t\right).$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = e^{x^3+xy}$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è composizione della funzione esponenziale e di un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è almeno di classe C^2 su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} (3x^2+y)\, e^{x^3+xy} = 0 \\ x\, e^{x^3+xy} = 0 \end{cases}$$

La funzione esponenziale non si annulla mai, dunque dalla seconda equazione si ricava $x = 0$, e sostituendo nella prima otteniamo $y = 0$. Dunque f ha un solo punto critico, dato da

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per caratterizzarlo andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Poiché f è di classe C^2 su tutto il dominio, la matrice Hessiana è simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} (9x^4+6x^2y+y^2+6x)\, e^{x^3+xy} & (3x^3+xy+1)\, e^{x^3+xy} \\ (3x^3+xy+1)\, e^{x^3+xy} & x^2\, e^{x^3+xy} \end{pmatrix},$$

e

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det Hf(0,0) = -1 < 0$. Dunque C è un punto di sella.

ii) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{|xy|}}.$$

La funzione di cui dobbiamo studiare il limite è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\}$, ossia il piano meno gli assi. Il limite è della forma indeterminata $\frac{0}{0}$, dunque iniziamo a studiarne il comportamento lungo le rette della forma $y = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{|xy|}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3+\lambda x^2}-1}{|x|\sqrt{|\lambda|}} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2 + o(x^2)}{|x|\sqrt{|\lambda|}} = 0 \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Dunque se il limite esiste, è uguale a 0. Proviamo però a studiare il comportamento del limite lungo altre direzioni. Proviamo con le restrizioni della forma $y = x^\alpha$ con $\alpha > 0$ e $x > 0$. Troviamo

$$\lim_{y=x^\alpha,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{|xy|}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^3+x^{1+\alpha}}-1}{|x|^{\frac{1+\alpha}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+x^{1+\alpha}+o(x^3+x^{1+\alpha})}{|x|^{\frac{1+\alpha}{2}}}$$

In particolare, se $1+\alpha > 3$, otteniamo

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + o(x^3)}{|x|^{\frac{1+\alpha}{2}}} ,$$

e il limite non esiste se $\frac{1+\alpha}{2} \geq 3$. Quindi il limite richiesto non esiste.

Esercizio 2. *Dato l'insieme*

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1 \,,\, y \leq \frac{1}{2} \right\} ,$$

i) utilizzare le coordinate polari per calcolare l'area di Ω svolgendo l'integrale (Suggerimento: può essere utile conoscere la derivata di $g(\theta) = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$)

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

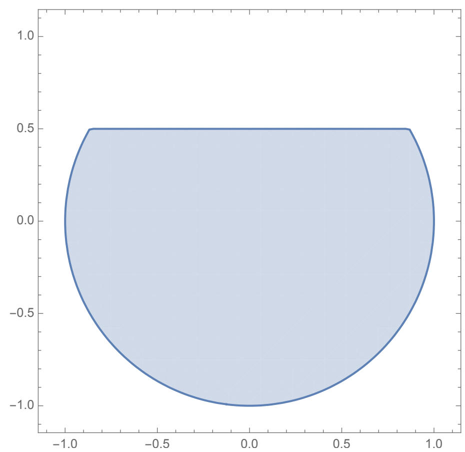

Figure 1: L'insieme Ω.

Usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

e ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_\Omega 1 \; dx\,dy = \iint_S \rho \; d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{ (\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \,:\, \rho^2 \leq 1 \,,\, \rho\sin\theta \leq \frac{1}{2} \right\}$$

La prima condizione ci dice che $\rho \in [0,1]$, mentre la seconda condizione si riscrive come

$$\begin{cases} \sin\theta > 0 \\ \rho \leq \frac{1}{2\sin\theta} \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} \sin\theta < 0 \\ \forall\,(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \end{cases}$$

L'insieme S si ottiene quindi come unione degli insiemi di soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \sin\theta > 0 \\ \rho \leq \frac{1}{2\sin\theta} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \sin\theta < 0 \\ \forall\,(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \end{cases}$$

Analizziamo il primo sistema:

$$\begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \sin\theta > 0 \\ \rho \leq \frac{1}{2\sin\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \theta \in [0,\pi] \\ \rho \leq \frac{1}{2\sin\theta} \end{cases}$$

Disegnando la funzione $\rho = \frac{1}{2\sin\theta}$ per $\theta \in [0,\pi]$, otteniamo la figura 2 con θ sulle ascisse e ρ sulle ordinate. Poiché l'equazione $\frac{1}{2\sin\theta} = 1$ ha in $[0,\pi]$ soluzione in $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$, il primo sistema ha come

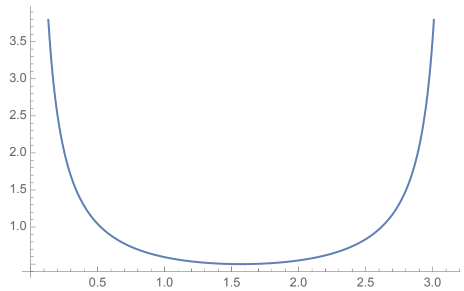

Figure 2: Il grafico della funzione $\rho = \frac{1}{2\sin\theta}$.

soluzione l'insieme

$$\left\{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\,,\, 0 \leq \rho \leq 1\right\} \quad \bigcup \quad \left\{\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi\,,\, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2\sin\theta}\right\} \quad \bigcup \quad \left\{\frac{5}{6}\pi \leq \theta \leq \pi\,,\, 0 \leq \rho \leq 1\right\}.$$

Analizziamo il secondo sistema:

$$\begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \sin\theta < 0 \\ \forall\,(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \theta \in (\pi,2\pi) \\ \forall\,(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \end{cases}$$

e quindi la sua soluzione è l'insieme

$$\{\pi < \theta < 2\pi\,,\, 0 \leq \rho \leq 1\}\ .$$

Possiamo quindi scrivere S come

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3\,,$$

dove

$$S_1 = \left\{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\,,\, 0 \leq \rho \leq 1\right\}$$

$$S_2 = \left\{ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5}{6}\pi \, , \, 0 \le \rho \le \frac{1}{2 \sin\theta} \right\}$$

$$S_3 = \left\{ \frac{5}{6}\pi \le \theta \le 2\pi \, , \, 0 \le \rho \le 1 \right\} .$$

Dunque

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_\Omega 1 \; dx\, dy = \iint_S \rho \; d\rho\, d\theta = \iint_{S_1} \rho \; d\rho\, d\theta + \iint_{S_2} \rho \; d\rho\, d\theta + \iint_{S_3} \rho \; d\rho\, d\theta .$$

Per i singoli integrali si trova

$$\iint_{S_1} \rho \; d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^1 \rho \; d\rho \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} \; d\theta = \frac{\pi}{12} .$$

$$\iint_{S_2} \rho \; d\rho\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2 \sin\theta}} \rho \; d\rho \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{1}{8 \sin^2\theta} \; d\theta = -\frac{1}{8} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} = \frac{\sqrt{3}}{4} .$$

$$\iint_{S_3} \rho \; d\rho\, d\theta = \int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho \; d\rho \right) d\theta = \int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} \; d\theta = \frac{7}{12}\pi .$$

Quindi

$$\text{Area}(\Omega) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{3}\pi .$$

ii) determinare massimo e minimo su Ω della funzione

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a Ω, sui punti critici vincolati al bordo di Ω, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non differenziabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non differenziabilità, quindi per trovarne i punti critici dobbiamo risolvere il sistema $\nabla f(x, y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

Dunque f ha un solo punto critico, dato da

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è interno a Ω, e va dunque considerato.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di Ω. Gli spigoli sono i punti

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Il bordo è composto da due parti

$$\Gamma_1 = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, y = \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ x^2 + y^2 = 1 \,,\, y \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Studiamo prima f ristretta a Γ_1. Parametrizziamo il segmento tramite

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \frac{3}{4} - t^2 \,, \qquad t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

Si trova $g_1'(t) = -2t$, che si annulla per $t = 0 \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$, quindi otteniamo il punto critico vincolato

$$Q_3 = \gamma_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Studiamo ora f ristretta a Γ_2. Possiamo subito notare che $f|_{\Gamma_2} \equiv 0$, ossia è la funzione costante nulla. Infatti se parametrizziamo Γ_2 tramite

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[-\frac{7}{6}\pi \,,\, \frac{\pi}{6} \right]$$

otteniamo, componendo con f, la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 0 \,, \qquad t \in \left[-\frac{7}{6}\pi \,,\, \frac{\pi}{6} \right]$$

Tutti i punti di Γ_2 sono dunque critici vincolati, e il valore di f coincide con quello sugli spigoli Q_1 e Q_2.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = 1 \,, \quad f(Q_1) = f(Q_2) = 0 \,, \quad f(Q_3) = \frac{3}{4} \,.$$

Per cui su Ω, il minimo di f è 0, e il massimo è 1.

Esercizio 3. *Dato il campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y^3 + x^2 y - 2x}{x^2 + y^2} \\ \frac{x^3 + x y^2 + 2y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

i) studiarne il dominio, e dire se è irrotazionale e conservativo;

Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) =$$

$$= \frac{(3x^2+y^2)(x^2+y^2)-(2x)(x^3+xy^2+2y)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(-3y^2-x^2)(x^2+y^2)-(2y)(-y^3-x^2y+2x)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{3x^4+4x^2y^2+y^4-2x^4-2x^2y^2-4xy+4x^2y^2+3y^4+x^4-2y^4-2x^2y^2+4xy}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^4+2y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2 \neq 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale, e di conseguenza non è conservativo.

ii) calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}$ *lungo* (γ, I)*, con* $I = [0, 2\pi]$ *e*

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(2 + \frac{1}{2}\cos t\,,\, \sin t\Big)\,.$$

Studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva è chiusa e semplice, e ha come sostegno un'ellisse, di centro $C = (2,0)$ e semiassi $a = \frac{1}{2}$ e $b = 1$. In particolare, U, la parte racchiusa dal sostegno, non contiene l'origine. Dunque U è contenuto nel dominio del campo $\mathbf{F}$. Possiamo quindi applicare il Teorema del Rotore, e otteniamo

$$L(\mathbf{F},\gamma) = \iint_U \operatorname{rot}(\mathbf{F})(x,y)\; dx\, dy = \iint_U 2\; dx\, dy = 2\,\text{Area}(U) = \pi\,,$$

dove abbiamo usato il fatto che l'area del piano racchiusa da un'ellisse di semiassi a e b è data da πab.