Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 16-09-2011

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} e^{iz} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{2iz+1} \\ z + \bar{z} \geq 0 \\ \left|z - \frac{\pi}{4}\right| \leq 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti) Dire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_1[t]$ tale che $\ker(T) = \mathrm{Span}(1+t)$ e, in caso affermativo, scrivere la matrice A associata a una tale applicazione T rispetto alle basi $\mathcal{B} = \left\{1+t, 1-t, t^2\right\}$ di $\mathbb{R}_2[t]$ e $\mathcal{C} = \{1+t, 1-t\}$ di $\mathbb{R}_1[t]$.

Esercizio 3. (6 punti) Trovare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 + k \end{cases}$$

Esercizio 4. (8 punti) (i) Dire se esistono in $\mathbb{R}^3$ due sottospazi affini di dimensione 1 non passanti per l'origine e che si intersecano in un solo punto;

(ii) trovare in $\mathbb{R}^4$ due sottospazi affini di dimensione 2 che non siano sottospazi vettoriali e che si intersechino in un solo punto.

Esercizio 5. (6 punti) Data l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) trovare nucleo e immagine di L_A;

(ii) dire se la matrice A è triangolabile o diagonalizzabile, e rispetto a quale base.

Svolgimento

- **Esercizio 1** *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} e^{iz} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{2iz+1} \\ z + \bar{z} \geq 0 \\ \left|z - \frac{\pi}{4}\right| \leq 1 \end{cases}$$

Scriviamo la prima equazione del sistema nella forma

$$e^{iz} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{2iz+1} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{iz} = e^{-\frac{\pi}{4}i+2iz+1}$$

da cui, per la periodicità dell'esponenziale nel campo complesso, troviamo

$$iz = -\frac{\pi}{4}i + 2iz + 1 + 2k\pi i \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

e quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z = \frac{\pi}{4} - 2k\pi + i \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

La seconda condizione del sistema si traduce nella condizione

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{\pi}{4} - 2k\pi \geq 0$$

e la terza si traduce in

$$d(z, \frac{\pi}{4}) = \sqrt{4k^2\pi^2 + 1} \leq 1$$

Da cui si ricava che l'unica soluzione del sistema è

$$z = \frac{\pi}{4} + i$$

- **Esercizio 2** *Dire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_1[t]$ tale che $\ker(T) = Span(1+t)$ e, in caso affermativo, scrivere la matrice A associata a una tale applicazione T rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{1+t, 1-t, t^2\}$ di $\mathbb{R}_2[t]$ e $\mathcal{C} = \{1+t, 1-t\}$ di $\mathbb{R}_1[t]$.*

Abbiamo

$$\dim \mathbb{R}_2[t] = 3 \qquad \dim \mathbb{R}_1[t] = 2,$$

quindi per il Teorema della dimensione, si trova

$$3 = \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) \quad \Rightarrow \quad \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 = \dim \mathbb{R}_1[t]$$

Ne segue che una tale applicazione può esistere ed è surgettiva. Per determinarne una, bisogna fissare il suo valore su una base di $\mathbb{R}_2[t]$. Scegliamo come base

$$\mathcal{B} = \{1+t, 1-t, t^2\}$$

e imponiamo che

$$T(1+t) = 0$$

in modo che $1+t \in \ker(T)$, e poi

$$T(1-t) = 1+t \quad \text{e} \quad T(t^2) = 1-t,$$

in modo che l'immagine sia tutto $\mathbb{R}_1[t]$ (abbiamo infatti scelto proprio i vettori della base $\mathcal{C}$).

La matrice A sarà una matrice 2×3, e ricordiamo che le sue colonne sono i coefficienti delle combinazioni lineari delle immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, rispetto alla base $\mathcal{C}$. Quindi si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Esercizio 3** *Trovare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 + k \end{cases}$$

Il sistema lineare è quadrato, quindi calcoliamo innanzitutto il rango della matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si trova $\det(A) = 0$, quindi il rango di A è minore di 3. Inoltre la prima sottomatrice principale 2×2 di A ha determinabte diverso da 0, quindi $rango(A) = 2$.

Studiamo ora il rango della matrice dei coefficienti

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1+k \end{array}\right)$$

Calcolando il determinante della sottomatrice 3×3 B' di A' che si ottiene togliendo la prima colonna, si trova $\det(B') = -3k$. Quindi se $k \neq 0$ si ha $rango(A') = 3$, mentre se $k = 0$ si ha $rango(A') = 2$.

Quindi per $k \neq 0$ il sistema non è compatibile, mentre se $k = 0$ il sistema è compatibile, e il suo insieme di soluzioni $\mathcal{S}$ verifica

$$\dim(\mathcal{S}) = 3 - rango(A) = 1$$

Per determinare $\mathcal{S}$, poniamo $k = 0$ e riduciamo A' ad una matrice a scala. Si ottiene la matrice

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e quindi risolviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che l'insieme delle soluzioni $\mathcal{S}$ nel caso $k = 0$ è il sottospazio affine

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

- **<u>Esercizio 4</u>** *(i) Dire se esistono in $\mathbb{R}^3$ due sottospazi affini di dimensione 1 non passanti per l'origine e che si intersecano in un solo punto;*

  Si chiede se esistono in $\mathbb{R}^3$ due rette non passanti per l'origine che si intersecano in un solo punto. La risposta è positiva e un esempio è fornito dalle rette

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

  (ii) trovare in $\mathbb{R}^4$ due sottospazi affini di dimensione 2 che non siano sottospazi vettoriali e che si intersechino in un solo punto.

  Si chiede se esistono in $\mathbb{R}^4$ due piani non passanti per l'origine che si intersecano in un solo punto. Come nel punto precedente possiamo costruire un esempio considerando due piani che siano in somma diretta e traslandoli in un punto esterno ad entrambi. Quindi per esempio

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- **<u>Esercizio 5</u>** *Data l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

  (i) trovare nucleo e immagine di L_A;

  La matrice A verifica $\det(A) = 0$, e in particolare si trova $rango(A) = 2$ dato che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

  Quindi applicando il Teorema della Dimensione, si trova

$$\dim(\ker(L_A)) = 1 \qquad \dim(\mathrm{Im}(L_A)) = 2$$

  Per trovare una base del $\ker(L_A)$ basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

  da cui si trova

$$\ker(L_A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

  Mentre l'immagine di L_A è generata da due colonne linearmente indipendenti di A, quindi

$$\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(e_1, e_2 + e_3\right)$$

(ii) dire se la matrice A è triangolabile o diagonalizzabile, e rispetto a quale base.

Dobbiamo cercare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 4t^2 + 4t) = -t(t-2)^2$$

Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{0, 2\}$ con molteplicità algebriche $m_0 = 1$ e $m_2 = 2$. Cerchiamo le molteplicità geometriche:

$$g_0 = \dim\ker(A) = 1$$

$$g_2 = \dim\ker(A - 2I) = \dim\ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

anche se per l'autovalore 0, poiché $m_0 = 1$, si può subito concludere che $g_0 = m_0 = 1$. Quindi poiché $m_0 + m_2 = 3$ e $g_0 = m_0$, $g_2 < m_2$, si conclude che la matrice A è triangolabile ma non diagonalizzabile.

La base $\mathcal{C}$ che la rende triangolare avrà un autovettore relativo all'autovalore 0, dato da

$$Av = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

e un autovettore relativo all'autovalore 2, dato da

$$(A - 2I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Il terzo vettore della base $\mathcal{C}$ è relativo all'autovalore 2 e si trova cercando una soluzione di

$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ad esempio} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$