Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito A del 16-09-2010

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare se è una funzione continua sul dominio;

ii) scrivere le derivate parziali di f in tutti i punti del dominio e determinare se sono funzioni continue;

iii) dire in quali punti la funzione f è differenziabile.

Esercizio 2. (12 punti) Data la funzione

$$F(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy$$

i) dire se la curva di livello $\{F(x,y) = 4\}$ è una curva regolare;

ii) trovare un punto $P = (x_0, y_0)$ appartenente alla curva di livello $\{F(x,y) = 4\}$ che ha retta tangente ortogonale al vettore $\vec{v} = (1,1)$;

iii) dire se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che la curva di livello $\{F(x,y) = c\}$ non è una curva regolare.

Esercizio 3. (12 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + \sin y \\ x^2 - y + z \\ \log\left[(x-3)^2 + y^2\right] \end{pmatrix}$$

i) determinare il dominio di $\mathbf{F}$;

ii) calcolare $\mathrm{div}(\mathbf{F})$;

iii) calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}$ uscente dalla superficie $\Sigma = \partial U$ bordo dell'insieme

$$U = \left\{(x,y,z) \ : \ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, \ -1 + \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$$

Svolgimento - A

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare se è una funzione continua sul dominio;

Il dominio della funzione è $D = \mathbb{R}^2$ e su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è continua perché composizione di funzioni continue, infatti possiamo scrivere $f = g \circ h$ con $g(t) = \cos(t)$ e $h(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. Rimane da determinare la continuità in $(0,0)$, per cui bisogna stabilire se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1$$

Iniziamo a studiare il comportamento di f lungo le rette $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Otteniamo

$$\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x) = \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\lambda^2 x^3}{x^2(1+\lambda^2)}\right) = 1$$

per cui se il limite per la funzione f esiste allora è uguale a 1.

Proviamo a dimostrare che il limite esiste. Poiché la funzione $g(t) = \cos(t)$ è continua su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$, basta dimostrare che esiste il limite per la funzione $h(x,y)$ e che è uguale a 0. Scrivendo la disuguaglianza

$$0 \leq |h(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|xy^2|}{|2xy|} = \frac{1}{2}|y|$$

otteniamo che h è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, e quindi anche la funzione $f(x,y)$ è continua su tutto il suo dominio.

ii) scrivere le derivate parziali di f in tutti i punti del dominio e determinare se sono funzioni continue;

Consideriamo prima il caso della derivata parziale rispetto alla variabile x. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ possiamo derivare semplicemente rispetto alla x, ottenendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) \frac{y^2(x^2+y^2) - xy^2(2x)}{(x^2+y^2)^2} = -\sin\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) \frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

Per calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ dobbiamo usare la definizione di derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0) + t(1,0)\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t} = 0$$

Quindi la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è certamente continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché composizione di funzioni continue. Per studiare la continuità in $(0,0)$ iniziamo a studiare il suo comportamento lungo le rette $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda x) = \lim_{x\to 0} -\sin\left(\frac{\lambda^2 x^3}{x^2(1+\lambda^2)}\right) \frac{x^4\, \lambda^2(\lambda^2-1)}{x^4(1+\lambda^2)^2} = 0$$

per cui se il limite esiste allora è uguale a 0, il valore di $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Proviamo a dimostrare che il limite esiste. Poiché la funzione $\sin(t)$ è continua su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$ e la funzione $h(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, rimane da studiare solo l'ultima parte della derivata. Scrivendo

$$\left|\frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{y^2\,(y^2+x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

otteniamo che $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ è il prodotto di un termine che tende a 0 e di un termine limitato. Quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

e dunque la derivata parziale rispetto alla x è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo ora il caso della derivata parziale rispetto alla variabile y. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ possiamo derivare semplicemente rispetto alla y, ottenendo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) \frac{2xy(x^2+y^2) - xy^2(2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\sin\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

Per calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ dobbiamo usare la definizione di derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0)+t(0,1)\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t} = 0$$

Quindi la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è certamente continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché composizione di funzioni continue. Per studiare la continuità in $(0,0)$ iniziamo a studiare il suo comportamento lungo le rette $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} -\sin\left(\frac{\lambda^2 x^3}{x^2(1+\lambda^2)}\right) \frac{2x^4\,\lambda}{x^4(1+\lambda^2)^2} = 0$$

per cui se il limite esiste allora è uguale a 0, il valore di $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Proviamo a dimostrare che il limite esiste. Poiché la funzione $\sin(t)$ è continua su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$ e la funzione $h(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, rimane da studiare solo l'ultima parte della derivata. Scrivendo

$$\left|\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{x^2\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

otteniamo che $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ è il prodotto di un termine che tende a 0 e di un termine limitato. Quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

e dunque anche la derivata parziale rispetto alla y è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

iii) dire in quali punti la funzione f è differenziabile.

Nei due punti precedenti abbiamo dimostrato che la funzione f è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, essendo continua e con derivate parziali continue su tutto $\mathbb{R}^2$. Quindi per il Teorema del Differenziale Totale è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. (12 punti) Data la funzione

$$F(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy$$

i) dire se la curva di livello $\{F(x,y) = 4\}$ è una curva regolare;

La curva di livello di una funzione è regolare se in nessun punto della curva si annulla il gradiente della funzione, dunque se non esistono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} F(x,y) = 4 \\ \nabla F(x,y) = 0 \end{cases}$$

che in questo caso è il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2xy = 4 \\ 6x - 2y = 0 \\ 6y - 2x = 0 \end{cases}$$

Le ultime due equazioni del sistema hanno come unica soluzione il punto $P = (0, 0)$, che però non verifica la prima equazione del sistema. Quindi la curva $\{F(x, y) = 4\}$ è regolare.

ii) trovare un punto $P = (x_0, y_0)$ appartenente alla curva di livello $\{F(x, y) = 4\}$ che ha retta tangente ortogonale al vettore $\vec{v} = (1, 1)$;

Il vettore gradiente $\nabla F(P)$ è ortogonale alla retta tangente alla curva di livello $\{F(x, y) = 4\}$ in P, quindi dire che la retta tangente in P è ortogonale al vettore $\vec{v} = (1, 1)$ è equivalente a dire che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $\nabla F(P) = \lambda\vec{v}$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = 4 \\ \nabla F(x_0, y_0) = \lambda\vec{v} \end{cases}$$

che diventa il sistema

$$\begin{cases} 3x_0^2 + 3y_0^2 - 2x_0y_0 = 4 \\ 6x_0 - 2y_0 = \lambda \\ 6y_0 - 2x_0 = \lambda \end{cases}$$

Dalle ultime due equazioni si ricava che $6x_0 - 2y_0 = 6y_0 - 2x_0$, quindi che $x_0 = y_0$. Sostituendo nella prima equazione si trova quindi che $x_0^2 = 1$. Otteniamo quindi due soluzioni, i punti $P_1 = (1, 1)$ e $P_2 = (-1, -1)$ (*osserviamo che l'esistenza di due soluzioni è facile conseguenza del fatto che la curva di livello* $\{F(x, y) = 4\}$ *è un'ellisse!*)

iii) dire se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che la curva di livello $\{F(x, y) = c\}$ non è una curva regolare.

Ripetendo il ragionamento del punto i), dobbiamo trovare $c \in \mathbb{R}$ per cui il sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = c \\ \nabla F(x, y) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione. Abbiamo visto che le ultime due equazioni hanno come unica soluzione $P = (0, 0)$, quindi sostituendo nella prima troviamo $c = F(0, 0) = 0$. Quindi $c = 0$ è il valore cercato.

Esercizio 3. (12 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + \sin y \\ x^2 - y + z \\ \log\left[(x-3)^2 + y^2\right] \end{pmatrix}$$

i) determinare il dominio di $\mathbf{F}$;

Il dominio Ω di $\mathbf{F}$ è l'intersezione dei domini delle tre componenti. Le prime due sono definite su tutto $\mathbb{R}^3$, mentre l'ultima è definita su $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x-3)^2 + y^2 > 0\right\} = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x-3)^2 + y^2 = 0\right\}$. Quindi il dominio di $\mathbf{F}$ è $\mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x-3)^2 + y^2 = 0\right\}$, e si tratta di $\mathbb{R}^3$ meno la retta $\{x = 3, y = 0\} = \{(3, 0, z) \ : \ z \in \mathbb{R}\}$, un insieme connesso ma non semplicemente connesso.

ii) calcolare $\text{div}(\mathbf{F})$;

Applichiamo la definizione di divergenza

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2 - 1 + 0 = 1$$

iii) calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}$ uscente dalla superficie $\Sigma = \partial U$ bordo dell'insieme

$$U = \left\{(x, y, z) \;:\; 0 \le x^2 + y^2 \le 1,\; -1 + \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$$

L'insieme Σ è il bordo dell'insieme U nella figura 1.

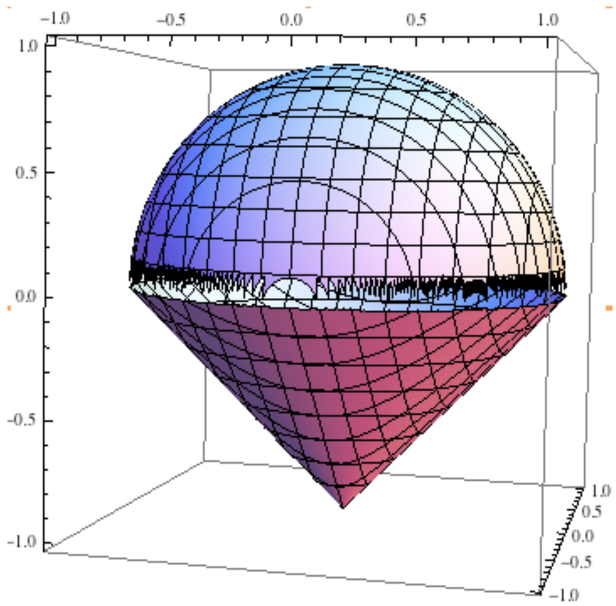

Figure 1: L'insieme U

Verifichiamo che siano soddisfatte le ipotesi del Teorema della Divergenza che recita: Sia $(\mathbf{F})$ un campo di vettori differenziabile con dominio un aperto connesso Ω. Sia Σ una supercie chiusa, regolare e orientabile, con orientazione naturale, ossia con versore normale che punta verso lesterno, e supponiamo che la parte interna alla supercie U sia contenuta in Ω, allora $\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_U \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dxdydz$.

Le ipotesi sul campo sono soddisfatte per il punto i). La superficie Σ è chiusa, regolare (tranne che in nel vertice del cono, che essendo un solo punto si può trascurare) e orientabile. Rimane da verificare che $U \subset \Omega$. Per far questo osserviamo che per ogni $(x, y, z) \in U$ vale certamente $x < 1$. Quindi l'insieme U non può intersecare la retta $\{(3, 0, z) \;:\; z \in \mathbb{R}\}$, e di conseguenza $U \subset \Omega$.

Applicando quindi il Teorema della Divergenza siamo ricondotti a calcolare

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_U 1\, dxdydz$$

La forma di U suggerisce di cambiare variabili nell'integrale e usare le coordinate cilindriche. Poniamo quindi $x(\rho, \theta, t) = \rho \cos\theta$, $y(\rho, \theta, t) = \rho \sin\theta$ e $z = t$, con $\rho \ge 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $t \in \mathbb{R}$, e sostituendo in U otteniamo che l'insieme su cui integrare rispetto alle variabili (ρ, θ, t) è l'insieme D dato da

$$D = \left\{(\rho, \theta, t) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \;:\; 0 \le \rho \le 1,\; -1 + \rho \le t \le \sqrt{1 - \rho^2}\right\}$$

Per l'integrale otteniamo quindi

$$\iiint_U 1\, dxdydz = \iiint_D \rho\, d\rho d\theta dt = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{\rho-1}^{\sqrt{1-\rho^2}} 1\, dt\right) \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\rho - \rho^2 + \rho\sqrt{1 - \rho^2}\right) d\rho = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \pi$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito B del 16-09-2010

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare se è una funzione continua sul dominio;

ii) scrivere le derivate parziali di f in tutti i punti del dominio e determinare se sono funzioni continue;

iii) dire in quali punti la funzione f è differenziabile.

Esercizio 2. (12 punti) Data la funzione

$$F(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy$$

i) dire se la curva di livello $\{F(x,y) = 4\}$ è una curva regolare;

ii) trovare un punto $P = (x_0, y_0)$ appartenente alla curva di livello $\{F(x,y) = 4\}$ che ha retta tangente ortogonale al vettore $\vec{v} = (1,1)$;

iii) dire se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che la curva di livello $\{F(x,y) = c\}$ non è una curva regolare.

Esercizio 3. (12 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \log\left[(y-3)^2 + z^2\right] \\ x^2 - y + z \\ xy + 2z \end{pmatrix}$$

i) determinare il dominio di $\mathbf{F}$;

ii) calcolare $\mathrm{div}(\mathbf{F})$;

iii) calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}$ uscente dalla superficie $\Sigma = \partial U$ bordo dell'insieme

$$U = \left\{(x,y,z) \ : \ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, \ -1 + \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$$

Svolgimento - B

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare se è una funzione continua sul dominio;

Il dominio della funzione è $D = \mathbb{R}^2$ e su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è continua perché composizione di funzioni continue, infatti possiamo scrivere $f = g \circ h$ con $g(t) = \cos(t)$ e $h(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$. Rimane da determinare la continuità in $(0,0)$, per cui bisogna stabilire se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1$$

Iniziamo a studiare il comportamento di f lungo le rette $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Otteniamo

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\lambda x^3}{x^2(1+\lambda^2)}\right) = 1$$

per cui se il limite per la funzione f esiste allora è uguale a 1.

Proviamo a dimostrare che il limite esiste. Poiché la funzione $g(t) = \cos(t)$ è continua su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$, basta dimostrare che esiste il limite per la funzione $h(x,y)$ e che è uguale a 0. Scrivendo la disuguaglianza

$$0 \leq |h(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x^2y|}{|2xy|} = \frac{1}{2}\,|x|$$

otteniamo che h è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, e quindi anche la funzione $f(x,y)$ è continua su tutto il suo dominio.

ii) scrivere le derivate parziali di f in tutti i punti del dominio e determinare se sono funzioni continue;

Consideriamo prima il caso della derivata parziale rispetto alla variabile x. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ possiamo derivare semplicemente rispetto alla x, ottenendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)\,\frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = -\sin\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)\,\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

Per calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ dobbiamo usare la definizione di derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0) + t(1,0)\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t} = 0$$

Quindi la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è certamente continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché composizione di funzioni continue. Per studiare la continuità in $(0,0)$ iniziamo a studiare il suo comportamento lungo le rette $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} -\sin\left(\frac{\lambda x^3}{x^2(1+\lambda^2)}\right)\,\frac{2x^4\lambda^3}{x^4(1+\lambda^2)^2} = 0$$

per cui se il limite esiste allora è uguale a 0, il valore di $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Proviamo a dimostrare che il limite esiste. Poiché la funzione $\sin(t)$ è continua su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$ e la funzione $h(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, rimane da studiare solo l'ultima parte della derivata. Scrivendo

$$\left|\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{y^2\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

otteniamo che $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ è il prodotto di un termine che tende a 0 e di un termine limitato. Quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

e dunque la derivata parziale rispetto alla x è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo ora il caso della derivata parziale rispetto alla variabile y. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ possiamo derivare semplicemente rispetto alla y, ottenendo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin\left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right) \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2 y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\sin\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) \frac{x^2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

Per calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ dobbiamo usare la definizione di derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0)+t(0,1)\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t} = 0$$

Quindi la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è certamente continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché composizione di funzioni continue. Per studiare la continuità in $(0,0)$ iniziamo a studiare il suo comportamento lungo le rette $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} -\sin\left(\frac{\lambda x^3}{x^2(1+\lambda^2)}\right) \frac{x^4\,(1-\lambda^2)}{x^4(1+\lambda^2)^2} = 0$$

per cui se il limite esiste allora è uguale a 0, il valore di $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Proviamo a dimostrare che il limite esiste. Poiché la funzione $\sin(t)$ è continua su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$ e la funzione $h(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, rimane da studiare solo l'ultima parte della derivata. Scrivendo

$$\left|\frac{x^2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{x^2\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

otteniamo che $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ è il prodotto di un termine che tende a 0 e di un termine limitato. Quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

e dunque anche la derivata parziale rispetto alla y è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

iii) dire in quali punti la funzione f è differenziabile.

Nei due punti precedenti abbiamo dimostrato che la funzione f è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, essendo continua e con derivate parziali continue su tutto $\mathbb{R}^2$. Quindi per il Teorema del Differenziale Totale è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. (12 punti) Data la funzione

$$F(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy$$

i) dire se la curva di livello $\{F(x,y) = 4\}$ è una curva regolare;

La curva di livello di una funzione è regolare se in nessun punto della curva si annulla il gradiente della funzione, dunque se non esistono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} F(x,y) = 4 \\ \nabla F(x,y) = 0 \end{cases}$$

che in questo caso è il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2xy = 4 \\ 6x - 2y = 0 \\ 6y - 2x = 0 \end{cases}$$

Le ultime due equazioni del sistema hanno come unica soluzione il punto $P = (0, 0)$, che però non verifica la prima equazione del sistema. Quindi la curva $\{F(x, y) = 4\}$ è regolare.

ii) trovare un punto $P = (x_0, y_0)$ appartenente alla curva di livello $\{F(x, y) = 4\}$ che ha retta tangente ortogonale al vettore $\vec{v} = (1, 1)$;

Il vettore gradiente $\nabla F(P)$ è ortogonale alla retta tangente alla curva di livello $\{F(x, y) = 4\}$ in P, quindi dire che la retta tangente in P è ortogonale al vettore $\vec{v} = (1, 1)$ è equivalente a dire che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $\nabla F(P) = \lambda \vec{v}$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = 4 \\ \nabla F(x_0, y_0) = \lambda \vec{v} \end{cases}$$

che diventa il sistema

$$\begin{cases} 3x_0^2 + 3y_0^2 - 2x_0 y_0 = 4 \\ 6x_0 - 2y_0 = \lambda \\ 6y_0 - 2x_0 = \lambda \end{cases}$$

Dalle ultime due equazioni si ricava che $6x_0 - 2y_0 = 6y_0 - 2x_0$, quindi che $x_0 = y_0$. Sostituendo nella prima equazione si trova quindi che $x_0^2 = 1$. Otteniamo quindi due soluzioni, i punti $P_1 = (1, 1)$ e $P_2 = (-1, -1)$ (*osserviamo che l'esistenza di due soluzioni è facile conseguenza del fatto che la curva di livello* $\{F(x, y) = 4\}$ *è un'ellisse!*)

iii) dire se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che la curva di livello $\{F(x, y) = c\}$ non è una curva regolare.

Ripetendo il ragionamento del punto i), dobbiamo trovare $c \in \mathbb{R}$ per cui il sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = c \\ \nabla F(x, y) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione. Abbiamo visto che le ultime due equazioni hanno come unica soluzione $P = (0, 0)$, quindi sostituendo nella prima troviamo $c = F(0, 0) = 0$. Quindi $c = 0$ è il valore cercato.

Esercizio 3. (12 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \log\left[(y-3)^2 + z^2\right] \\ x^2 - y + z \\ xy + 2z \end{pmatrix}$$

i) determinare il dominio di $\mathbf{F}$;

Il dominio Ω di $\mathbf{F}$ è l'intersezione dei domini delle tre componenti. Le ultime due sono definite su tutto $\mathbb{R}^3$, mentre la prima è definita su $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (y-3)^2 + z^2 > 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(y-3)^2 + z^2 = 0\}$. Quindi il dominio di $\mathbf{F}$ è $\mathbb{R}^3 \setminus \{(y-3)^2 + z^2 = 0\}$, e si tratta di $\mathbb{R}^3$ meno la retta $\{y = 3, z = 0\} = \{(x, 3, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$, un insieme connesso ma non semplicemente connesso.

ii) calcolare $\text{div}(\mathbf{F})$;

Applichiamo la definizione di divergenza

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 - 1 + 2 = 1$$

iii) calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}$ uscente dalla superficie $\Sigma = \partial U$ bordo dell'insieme

$$U = \left\{(x, y, z)\ :\ 0 \le x^2 + y^2 \le 1,\ -1 + \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$$

L'insieme Σ è il bordo dell'insieme U nella figura 2.

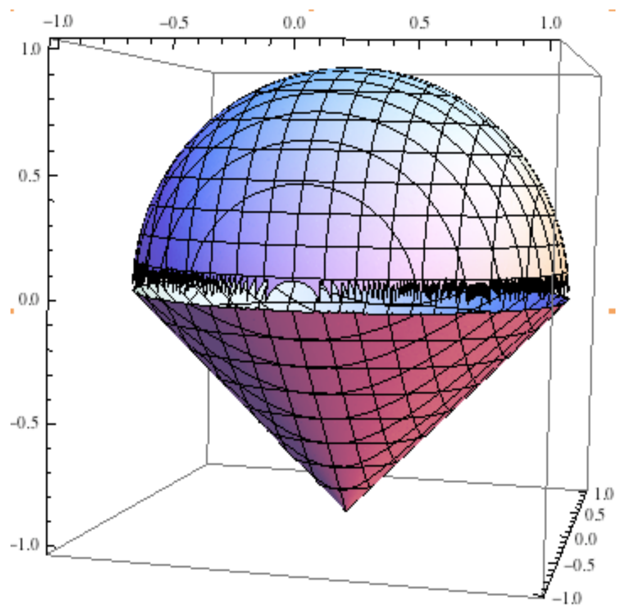

Figure 2: L'insieme U

Verifichiamo che siano soddisfatte le ipotesi del Teorema della Divergenza che recita: Sia $(\mathbf{F})$ un campo di vettori differenziabile con dominio un aperto connesso Ω. Sia Σ una supercie chiusa, regolare e orientabile, con orientazione naturale, ossia con versore normale che punta verso lesterno, e supponiamo che la parte interna alla supercie U sia contenuta in Ω, allora $\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_U \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dxdydz$.

Le ipotesi sul campo sono soddisfatte per il punto i). La superficie Σ è chiusa, regolare (tranne che in nel vertice del cono, che essendo un solo punto si può trascurare) e orientabile. Rimane da verificare che $U \subset \Omega$. Per far questo osserviamo che per ogni $(x, y, z) \in U$ vale certamente $y < 1$. Quindi l'insieme U non può intersecare la retta $\{(x, 3, 0)\ :\ x \in \mathbb{R}\}$, e di conseguenza $U \subset \Omega$.

Applicando quindi il Teorema della Divergenza siamo ricondotti a calcolare

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_U 1\, dxdydz$$

La forma di U suggerisce di cambiare variabili nell'integrale e usare le coordinate cilindriche. Poniamo quindi $x(\rho, \theta, t) = \rho \cos\theta$, $y(\rho, \theta, t) = \rho \sin\theta$ e $z = t$, con $\rho \ge 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $t \in \mathbb{R}$, e sostituendo in U otteniamo che l'insieme su cui integrare rispetto alle variabili (ρ, θ, t) è l'insieme D dato da

$$D = \left\{(\rho, \theta, t) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}\ :\ 0 \le \rho \le 1,\ -1 + \rho \le t \le \sqrt{1 - \rho^2}\right\}$$

Per l'integrale otteniamo quindi

$$\iiint_U 1\, dxdydz = \iiint_D \rho\, d\rho d\theta dt = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{\rho-1}^{\sqrt{1-\rho^2}} 1\, dt \right) \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\rho - \rho^2 + \rho\sqrt{1 - \rho^2}\right) d\rho = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \pi$$