Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito A del 16-07-2019

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2y - y^3$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^{\frac{3}{2}}\,y}$$

ii) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,0\le x\le 1\,,\,0\le y\le x\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I=[0,2]$ e parametrizzazione

$$\gamma:[0,2]\to\mathbb{R}^2\,,\qquad \gamma(t)=\Big(2+\sin(\pi t)\,,\,\cos(\pi t)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P=\left(\frac{5}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y)=\begin{pmatrix} x^2+xy+\frac{y}{x^2+y^2} \\ x^2-\frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

dove $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2-\frac{1}{4}\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2y - y^3$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^{\frac{3}{2}}\, y}$$

La funzione di cui bisogna studiare il limite è definita su $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\,,\, y \neq 0\}$. Dunque $(0,0)$ è un punto di accumulazione di X ed il limite richiesto ha senso. Osserviamo che si può scrivere

$$\frac{f(x,y)}{x^{\frac{3}{2}}\, y} = \frac{x^4 + 2x^2y - y^3}{x^{\frac{3}{2}}\, y} = \frac{x^4 - y^3}{x^{\frac{3}{2}}\, y} + 2\sqrt{x}$$

poiché si ha che $2\sqrt{x} \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, il limite di $\frac{f(x,y)}{x^{\frac{3}{2}}\, y}$ esiste se e solo se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^3}{x^{\frac{3}{2}}\, y}\,,$$

e i due limiti coincidono se esistono.

Studiamo quindi il limite della funzione $g(x,y) = \frac{x^4-y^3}{x^{\frac{3}{2}}\, y}$. Iniziamo studiando il limite lungo le rette $\{y = \lambda x\}$ con $\lambda \neq 0$. Si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)\,,\, y=\lambda x} g(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 - \lambda^3 x^3}{\lambda\, x^{\frac{5}{2}}} = 0\,, \quad \forall\, \lambda$$

Passando alle curve della forma $\{y = x^\alpha\}$ con $\alpha > 0$, si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)\,,\, y=x^\alpha} g(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 - x^{3\alpha}}{x^{\frac{3}{2}+\alpha}} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 + o(x^4)}{x^{\frac{3}{2}+\alpha}} & \text{se } \alpha \geq \frac{4}{3} \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3\alpha} + o(x^{3\alpha})}{x^{\frac{3}{2}+\alpha}} & \text{se } \alpha < \frac{4}{3} \end{cases}$$

Dunque se $\alpha \geq \frac{5}{2}$ oppure $\alpha \leq \frac{3}{4}$, il limite non è uguale a 0.

Abbiamo trovato almeno due direzioni lungo cui il limite di $g(x,y)$ ha valori diversi, e quindi il limite in questione non esiste.

ii) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione $f(x,y)$ è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y) = 0 \\ 2x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottengono le soluzioni $x = 0$ e $y = -x^2$. Sostituendo nella seconda si trova che le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} y = -x^2 \\ 2x^2 - 3x^4 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione del secondo sottosistema ha come soluzioni $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, e possiamo sostiuire nella prima equazione.

Abbiamo trovato dunque i punti critici

$$C_1 = (0,0) \qquad C_2 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{2}{3}\right) \qquad C_3 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{2}{3}\right)$$

Per caratterizzare i punti critici andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione differenziabile due volte su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y & 4x \\ 4x & -6y \end{pmatrix}.$$

Sostituendo i punti critici troviamo:

$$Hf(C_1) = Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_1) = 0$, e dunque non abbiamo sufficienti informazioni per caratterizzare C_1;

$$Hf(C_2) = Hf\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & -4\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -4\sqrt{\frac{2}{3}} & 4 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_2) = \frac{32}{3} > 0$, e $\text{traccia}(Hf(C_2)) = \frac{28}{3} > 0$, dunque C_2 è punto di minimo locale;

$$Hf(C_3) = Hf\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & 4\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 4\sqrt{\frac{2}{3}} & 4 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_3) = \frac{32}{3} > 0$, e $\text{traccia}(Hf(C_3)) = \frac{28}{3} > 0$, dunque C_3 è punto di minimo locale.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq x \leq 1 \, , \, 0 \leq y \leq x\right\}.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

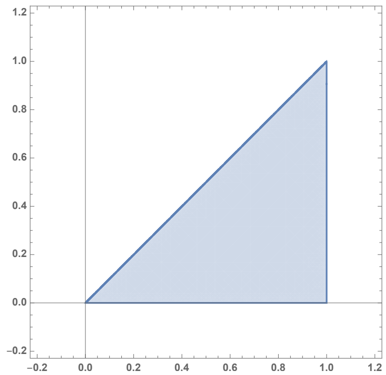

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

La funzione f è un polinomio, dunque certamente differenziabile in $\mathbb{R}^2$, e i punti critici liberi sono stati trovati al punto (ii). Nessuno dei punti critici trovati è interno a Ω, dunque non li consideriamo.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \{y = 0\,,\, 0 \le x \le 1\}$$

$$\Gamma_2 = \{x = 1\,,\, 0 \le y \le 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{y = x\,,\, 0 \le x \le 1\}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\,0)\,, \qquad t \in [0\,,\,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t^4, \qquad t \in [0\,,\,1]\ .$$

Si trova $g_1'(t) = 4t^3$, che non si annulla in $(0,1)$. Dunque non troviamo punti critici vincolati in Γ_1.

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (1\,,\,t)\,, \qquad t \in [0\,,\,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 1 + 2t - t^3, \qquad t \in [0\,,\,1]\ .$$

Si trova $g_2'(t) = 2 - 3t^2$, che in $(0,1)$ si annulla per $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = (t\,,\,t)\,, \qquad t \in [0\,,\,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = t^4 + t^3, \qquad t \in [0\,,\,1]\ .$$

Si trova $g_3'(t) = 4t^3 + 3t^2$, che non si annulla in $(0,1)$. Dunque non troviamo punti critici vincolati in Γ_3.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = 0\,, \quad f(S_2) = 1\,, \quad f(S_3) = 2\,, \quad f(Q_1) = 1 + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Poiché $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} > 1$, il massimo di f è $1 + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [0,2]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(2 + \sin(\pi t)\,,\,\cos(\pi t)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{5}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (0,2)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \left(\frac{5}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (0,2)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2 + \sin(\pi t_0) = \frac{5}{2} \\ \cos(\pi t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Si ottiene facilmente $t_0 = \frac{1}{6}$, e quindi la retta tangente al sostegno nel punto P è generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \pi\,\cos(\pi t_0) \\ -\pi\,\sin(\pi t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \pi\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)+\pi\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0\,.$$

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y)=\begin{pmatrix} x^2+xy+\frac{y}{x^2+y^2} \\ x^2-\frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio naturale è $X=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)=\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)=x$$

essendo

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)=2x-\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=2x+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)=x+\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=x+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale, e dunque non è certamente conservativo.

Studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva è chiusa, essendo $\gamma(0)=(2,1)=\gamma(2)$, e il suo sostegno, disegnato in figura 2, è una circonferenza di centro $C=(2,0)$ e raggio 1. Dunque, se

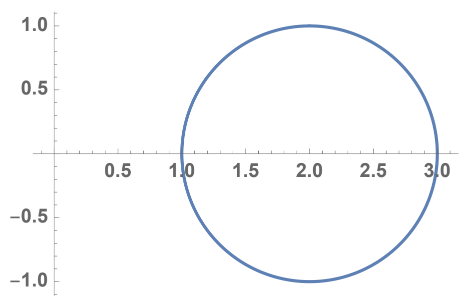

Figure 2: Il sostegno della curva (γ, I).

chiamiamo U la parte del piano racchiusa dalla curva, abbiamo che $U\subset X$, e sono dunque verificate le ipotesi del Teorema del Rotore. Infine osserviamo che la curva è orientata in senso orario, come si può ottenere calcolando $\gamma(\frac{1}{2})=(3,0)$, $\gamma(1)=(2,-1)$, $\gamma(\frac{3}{2})=(1,0)$. Quindi possiamo usare che

$$L(\mathbf{F},\gamma)=-\iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})\,dxdy=-\iint_U x\,dxdy$$

Scrivendo poi U come insieme semplice nella forma

$$U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,1\le x\le 3\,,\,-\sqrt{1-(x-2)^2}\le y\le\sqrt{1-(x-2)^2}\right\}$$

si trova

$$L(\mathbf{F},\gamma) = -\iint_U (x-2)\,dxdy - \iint_U 2\,dxdy = -\iint_1^3 \left(\int_{-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} (x-2)\,dy\right) dx - 2\,\mathrm{Area}(U) =$$

$$= -2\iint_1^3 (x-2)\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx - 2\pi = \frac{2}{3}\left(1-(x-2)^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 - 2\pi = -2\pi\,.$$

Esercizio 3. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2-\frac{1}{4}\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 3.

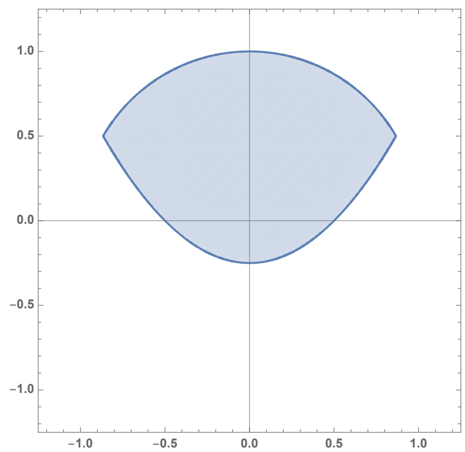

Figure 3: L'insieme Ω.

Per semplificare il calcolo usiamo il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Svolgiamolo con il cambiamento di variabili. Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint_S 1\,d\rho d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]\,:\,\rho^2\cos^2\theta - \frac{1}{4} \le \rho\sin\theta \le \sqrt{1-\rho^2\cos^2\theta}\right\}$$

La condizione $\rho \sin\theta \le \sqrt{1-\rho^2\cos^2\theta}$ ha come soluzione l'insieme

$$\{\rho \in [0,1]\,,\, \theta \in [0,\pi]\} \bigcup \{\rho \in [0,+\infty)\,,\, \theta \in (\pi, 2\pi)\}$$

mentre la condizione $\rho^2\cos^2\theta - \frac{1}{4} \le \rho\sin\theta$ si riscrive nella forma

$$\rho^2\cos^2\theta - \rho\sin\theta - \frac{1}{4} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \rho \le \frac{1+\sin\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{1}{2(1-\sin\theta)}$$

Ne segue che l'insieme S è quello rappresentato nella figura 4 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo considerare le soluzioni in $[0,\pi]$ di

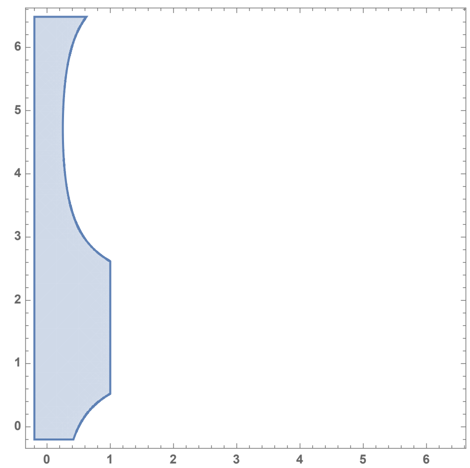

Figure 4: L'insieme S.

$$\frac{1}{2(1-\sin\theta)} = 1$$

che sono $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ e $\theta_2 = \frac{5}{6}\pi$. Dunque

$$S = \left\{(\rho,\theta)\,:\, 0<\theta<\frac{\pi}{6}\,,\, 0\le\rho\le\frac{1+\sin\theta}{2\cos^2\theta}\right\} \bigcup \left\{(\rho,\theta)\,:\, \frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi\,,\, 0\le\rho\le 1\right\} \bigcup$$

$$\bigcup \left\{(\rho,\theta)\,:\, \frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi\,,\, 0\le\rho\le\frac{1+\sin\theta}{2\cos^2\theta}\right\}$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint_S 1\,d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \Big(\int_0^{\frac{1+\sin\theta}{2\cos^2\theta}} 1\,d\rho\Big)d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \Big(\int_0^1 1\,d\rho\Big)d\theta + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{1+\sin\theta}{2\cos^2\theta}} 1\,d\rho\Big)d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\sin\theta}{2\cos^2\theta}\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} 1\,d\theta + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\pi} \frac{1+\sin\theta}{2\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} + \frac{1}{2}\left(\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right)\Big|_{\frac{5}{6}\pi}^{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi\,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito B del 16-07-2019

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 - 2xy^2 - y^4$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x\,y^{\frac{4}{3}}}$$

ii) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1\,,\, x \le y \le 1\right\}\ .$$

Esercizio 2. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0,2]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\sin(\pi t)\,,\, 2 + \cos(\pi t)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{5}{2}\right)$;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2 + \frac{y}{x^2+y^2} \\ y^2 - xy - \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - \frac{1}{4} \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^3 - 2xy^2 - y^4$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x\,y^{\frac{4}{3}}}$$

La funzione di cui bisogna studiare il limite è definita su $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0\,,\, y \neq 0\}$. Dunque $(0,0)$ è un punto di accumulazione di X ed il limite richiesto ha senso. Osserviamo che si può scrivere

$$\frac{f(x,y)}{x\,y^{\frac{4}{3}}} = \frac{x^3 - 2xy^2 - y^4}{x\,y^{\frac{4}{3}}} = \frac{x^3 - y^4}{x\,y^{\frac{4}{3}}} - 2y^{\frac{2}{3}}$$

poiché si ha che $2y^{\frac{2}{3}} \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, il limite di $\frac{f(x,y)}{x\,y^{\frac{4}{3}}}$ esiste se e solo se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^4}{x\,y^{\frac{4}{3}}}\,,$$

e i due limiti coincidono se esistono.

Studiamo quindi il limite della funzione $g(x,y) = \frac{x^3-y^4}{x\,y^{\frac{4}{3}}}$. Iniziamo studiando il limite lungo le rette $\{y = \lambda x\}$ con $\lambda \neq 0$. Si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)\,,\,y=\lambda x} g(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - \lambda^4 x^4}{\lambda^{\frac{4}{3}}\,x^{\frac{7}{3}}} = 0\,, \quad \forall\,\lambda$$

Passando alle curve della forma $\{y = x^\alpha\}$ con $\alpha > 0$, si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)\,,\,y=x^\alpha} g(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - x^{4\alpha}}{x^{1+\frac{4}{3}\alpha}} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+o(x^3)}{x^{1+\frac{4}{3}\alpha}} & \text{se } \alpha \geq \frac{3}{4} \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{4\alpha}+o(x^{4\alpha})}{x^{1+\frac{4}{3}\alpha}} & \text{se } \alpha < \frac{3}{4} \end{cases}$$

Dunque se $\alpha \geq \frac{3}{2}$ oppure $\alpha \leq \frac{3}{8}$, il limite non è uguale a 0.

Abbiamo trovato almeno due direzioni lungo cui il limite di $g(x,y)$ ha valori diversi, e quindi il limite in questione non esiste.

ii) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione $f(x,y)$ è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 0 \\ -4y(x + y^2) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottengono le soluzioni $y = 0$ e $x = -y^2$. Sostituendo nella seconda si trova che le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} 3y^4 - 2y^2 = 0 \\ x = -y^2 \end{cases}$$

La prima equazione del secondo sottosistema ha come soluzioni $y = 0$ e $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, e possiamo sostiuire nella prima equazione.

Abbiamo trovato dunque i punti critici

$$C_1 = (0,0) \qquad C_2 = \left(-\frac{2}{3}\,,\,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad C_3 = \left(-\frac{2}{3}\,,\,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Per caratterizzare i punti critici andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione differenziabile due volte su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -4y \\ -4y & -4x - 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Sostituendo i punti critici troviamo:

$$Hf(C_1) = Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_1) = 0$, e dunque non abbiamo sufficienti informazioni per caratterizzare C_1;

$$Hf(C_2) = Hf\left(-\frac{2}{3}\,,\,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \begin{pmatrix} -4 & 4\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 4\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{16}{3} \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_2) = \frac{32}{3} > 0$, e $\mathrm{traccia}(Hf(C_2)) = -\frac{28}{3} < 0$, dunque C_2 è punto di massimo locale;

$$Hf(C_3) = Hf\left(-\frac{2}{3}\,,\,\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \begin{pmatrix} -4 & -4\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -4\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{16}{3} \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_3) = \frac{32}{3} > 0$, e $\mathrm{traccia}(Hf(C_3)) = -\frac{28}{3} < 0$, dunque C_3 è punto di massimo locale.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1\,,\, x \le y \le 1\right\}.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 5.

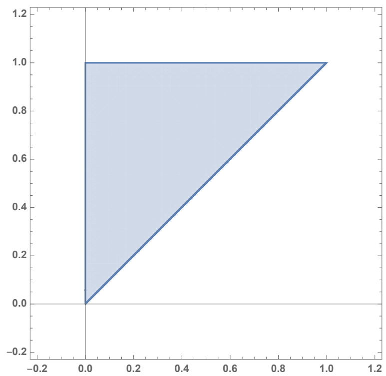

Figure 5: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

La funzione f è un polinomio, dunque certamente differenziabile in $\mathbb{R}^2$, e i punti critici liberi sono stati trovati al punto (ii). Nessuno dei punti critici trovati è interno a Ω, dunque non li consideriamo.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \{x = 0\,,\, 0 \le y \le 1\}$$

$$\Gamma_2 = \{y = 1\,,\, 0 \le x \le 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{y = x\,,\, 0 \le x \le 1\}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (0\,,\, t)\,, \qquad t \in [0\,,\, 1]\,,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = -t^4, \qquad t \in [0\,,\, 1]\,.$$

Si trova $g_1'(t) = -4t^3$, che non si annulla in $(0, 1)$. Dunque non troviamo punti critici vincolati in Γ_1.

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (t\,,\, 1)\,, \qquad t \in [0\,,\, 1]\,,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = t^3 - 2t - 1, \qquad t \in [0\,,\, 1]\,.$$

Si trova $g_2'(t) = 3t^2 - 2$, che in $(0,1)$ si annulla per $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = (t\,,\,t)\,, \qquad t \in [0\,,\,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = -t^3 - t^4, \qquad t \in [0\,,\,1]\ .$$

Si trova $g_3'(t) = -3t^2 - 4t^3$, che non si annulla in $(0,1)$. Dunque non troviamo punti critici vincolati in Γ_3.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = 0\,, \quad f(S_2) = -1\,, \quad f(S_3) = -2\,, \quad f(Q_1) = -1 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Poiché $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} > 1$, il massimo di f è 0 e il minimo è $-1 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [0,2]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\sin(\pi t)\,,\,2 + \cos(\pi t)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{5}{2}\right)$

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (0,2)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{5}{2}\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (0,2)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \sin(\pi t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 + \cos(\pi t_0) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Si ottiene facilmente $t_0 = \frac{1}{3}$, e quindi la retta tangente al sostegno nel punto P è generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \pi\ \cos(\pi t_0) \\ -\pi\ \sin(\pi t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\pi\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \pi\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\pi \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \left(y - \frac{5}{2} \right) = 0 \,.$$

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2 + \frac{y}{x^2+y^2} \\ y^2 - xy - \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio naturale è $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = y$$

essendo

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = -y - \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -y + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = -2y + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -2y + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale, e dunque non è certamente conservativo.

Studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva è chiusa, essendo $\gamma(0) = (0,3) = \gamma(2)$, e il suo sostegno, disegnato in figura 6, è una circonferenza di centro $C = (0,2)$ e raggio 1. Dunque, se

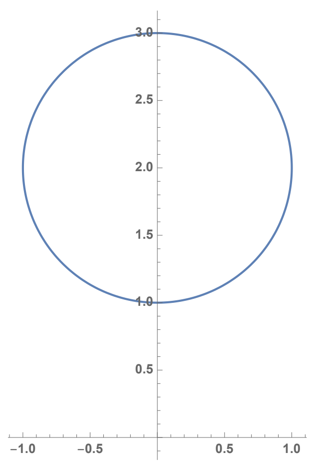

Figure 6: Il sostegno della curva (γ, I).

chiamiamo U la parte del piano racchiusa dalla curva, abbiamo che $U \subset X$, e sono dunque verificate le ipotesi del Teorema del Rotore. Infine osserviamo che la curva è orientata in senso orario, come si può ottenere calcolando $\gamma(\frac{1}{2}) = (1,2)$, $\gamma(1) = (0,1)$, $\gamma(\frac{3}{2}) = (-1,2)$. Quindi possiamo usare che

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = -\iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})\, dxdy = -\iint_U y\, dxdy$$

Scrivendo poi U come insieme semplice nella forma

$$U = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le y \le 3\,,\ -\sqrt{1-(y-2)^2} \le x \le \sqrt{1-(y-2)^2}\Big\}$$

si trova

$$L(\mathbf{F},\gamma) = -\iint_U (y-2)\,dxdy - \iint_U 2\,dxdy = -\iint_1^3 \Big(\int_{-\sqrt{1-(y-2)^2}}^{\sqrt{1-(y-2)^2}} (y-2)\,dx\Big)\,dy - 2\,\mathrm{Area}(U) =$$

$$= -2\iint_1^3 (y-2)\,\sqrt{1-(y-2)^2}\,dy - 2\pi = \frac{2}{3}\Big(1-(y-2)^2\Big)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 - 2\pi = -2\pi\,.$$

Esercizio 3. Vedi compito A.