Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 16-02-2013

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x+y}}$$

i) determinarne il dominio e dire se esiste il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 2\,,\ y = (x-1)^2\right\}$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2+y^2}\, dxdy$$

dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0,\ x^2+y^2 \le 2,\ y \le \sqrt{x}\right\}$$

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = \log_e z\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo;

ii) scrivere l'equazione parametrica del piano tangente a Σ nel punto $P = \big(1,\ 1,\ e^2\big)$;

iii) trovare $z(u,v)$ e D in modo che la funzione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\ , \qquad \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ v \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

definita su $D \subset \mathbb{R}^2$ sia una parametrizzazione di Σ. Questa parametrizzazione rende i punti di Σ regolari?

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x+y}}$$

i) determinarne il dominio e dire se esiste il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ ;$$

La funzione ha come dominio l'insieme

$$\text{Dominio} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y>0\right\}$$

Per dire se esiste il limite in $(0,0)$, iniziamo studiando i limiti lungo le rette che passano per l'origine, Si trova ad esempio per $\lambda \in [0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-\lambda x}{\sqrt{x+\lambda x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\frac{1-\lambda}{\sqrt{1+\lambda}} = 0$$

Proviamo a studiare il limite lungo un'altra curva passante per l'origine. Scegliamo, usando la forma del dominio, $y=-x+x^2$. Si trova

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,\,-x+x^2) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x-x^2}{\sqrt{x^2}} = 2$$

Dunque il limite non esiste perché abbiamo trovato due valori diversi lungo due direzioni diverse.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 2\,,\ y=(x-1)^2\right\}$$

L'insieme D è il sostegno di una curva, dunque o usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, per cui dobbiamo ricercare i punti critici vincolati a D, e considerare poi gli eventuali spigoli di D e punti di non derivabilità della funzione, o parametrizziamo D e ci riconduciamo a studiare massimo e minimo di una funzione di una sola variabile.

Usiamo questo secondo metodo. Parametrizziamo D con la funzione

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ (t-1)^2 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,2]$$

e componiamo con f, ottenendo la funzione di una variabile

$$g(t) = f(\gamma(t)) = \frac{t-(t-1)^2}{\sqrt{t+(t-1)^2}} = -\frac{t^2-3t+1}{\sqrt{t^2-t+1}}\,, \qquad t \in [0,2]$$

e ne cerchiamo massimo e minimo su $[0,2]$.

La funzione g ha derivata

$$g'(t) = -\frac{2t^3 - 3t^2 + 5t - 5}{2\,(t^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Gli zeri di $g'(t)$ non sono di facile individuazione, ma possiamo determinare che il polinomio

$$p(t) = 2t^3 - 3t^2 + 5t - 5$$

ha un sono zero t_0, essendo $p'(t) = 6t^2 - 6t + 5 > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Inoltre, notando che $p(0) = -5$, $p(1) = -1$ e $p(2) = 9$, si conclude che $p(t_0) = 0$ per $t_0 \in (1, 2)$. Quindi

$$g'(t) \begin{cases} > 0\,, & t \in (0, t_0) \\ = 0\,, & t = t_0 \\ < 0\,, & t \in (t_0, 2) \end{cases}$$

Il grafico di g è quindi della forma

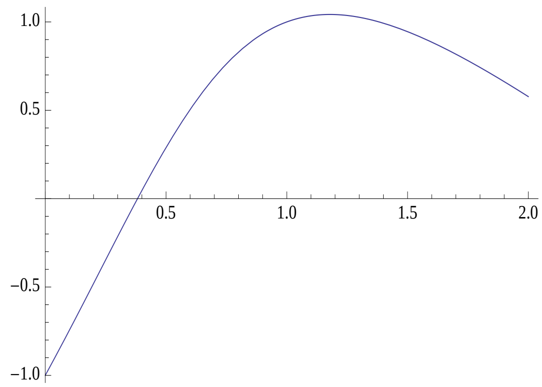

Figure 1: La funzione $g(t)$.

Il minimo di g si trova quindi confrontando

$$g(0) = -1 \quad \text{e} \quad g(2) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,,$$

mentre il massimo è $g(t_0)$. Quindi

$$\max_D f = g(t_0)\,, \qquad \min_D f = -1$$

Esercizio 2. *Calcolare*

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2 + y^2}\, dxdy$$

dove

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2,\ y \leq \sqrt{x}\right\}$$

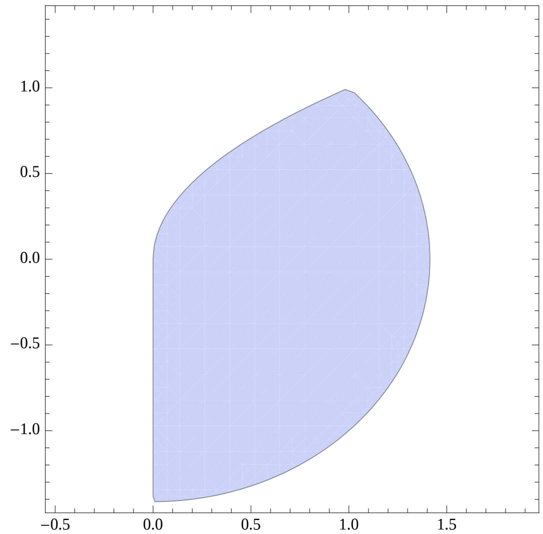

Figure 2: L'insieme Ω.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si scrive come l'insieme

$$\Omega = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi,\pi) \ : \ \rho\cos\theta \geq 0,\ \rho^2 \leq 2,\ \rho\sin\theta \leq \sqrt{\rho\cos\theta}\right\}$$

La prima condizione ci dice che dobbiamo restringerci a $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, mentre la seconda impone $\rho \in [0, \sqrt{2}]$. Per la terza condizione notiamo che: è sempre verificata per $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$ in quando $\sin\theta < 0$ in quest'intervallo; per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ si riscrive come $\rho \leq \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$, e va messa a sistema con $\rho \leq \sqrt{2}$. Otteniamo quindi che $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, dove

$$\Omega_1 = \left\{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right\}$$

essendo $\frac{\pi}{4}$ la soluzione nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ di $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \sqrt{2}$.

Quindi, usando le coordinate polari, l'integrale si risolve scrivendo

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{\Omega_1} \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy + \iint_{\Omega_2} \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \sin\theta\,d\rho\right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} \sin\theta\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\,\sin\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta =$$

$$= \left(-\sqrt{2}\,\cos\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} + (\log|\sin\theta|)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -1 + 0 + 0 - \log\frac{1}{\sqrt{2}} = -1 + \frac{1}{2}\log 2$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = \log_e z\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo;

La superficie Σ è una superficie di rotazione, che si ottiene facendo ruotare il grafico di $y = \sqrt{\log_e z}$ intorno all'asse z. Notiamo quindi che i punti di Σ dovranno verificare $z \geq 1$. Il disegno di Σ è quindi

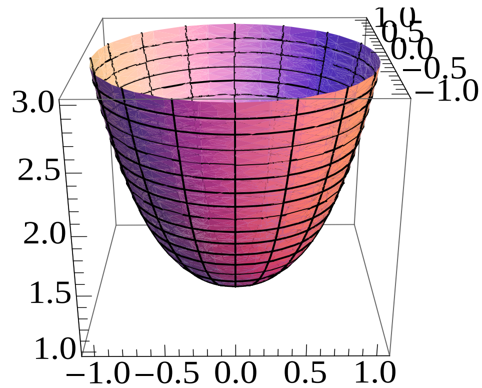

Figure 3: La superficie Σ.

ii) scrivere l'equazione parametrica del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(1,\ 1,\ e^2\right)$;

Possiamo parametrizzare Σ come superficie di rotazione usando

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \ , \qquad \sigma(t,\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{\log_e t}\,\cos\theta \\ \sqrt{\log_e t}\,\sin\theta \\ t \end{pmatrix}$$

con

$$D = \{(t,\theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \ : \ t \geq 1\}$$

Dobbiamo quindi trovare i vettori della base dello spazio tangente a Σ nel punto P, che si ottiene come $P = \sigma\left(e^2,\ \frac{\pi}{4}\right)$. Scriviamo quindi la matrice Jacobiana di σ, di cui consideriamo le due colonne. Troviamo

$$J_\sigma(t,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{2t\sqrt{\log_e t}} & -\sqrt{\log_e t}\,\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{2t\sqrt{\log_e t}} & \sqrt{\log_e t}\,\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$J_\sigma\left(e^2,\ \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\,e^2} & -1 \\ \frac{1}{4\,e^2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione parametrica del piano tangente a Σ in P è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ e^2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{4\,e^2} \\ \frac{1}{4\,e^2} \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

iii) trovare $z(u,v)$ e D in modo che la funzione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \ , \qquad \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ v \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

definita su $D \subset \mathbb{R}^2$ sia una parametrizzazione di Σ. Questa parametrizzazione rende i punti di Σ regolari?

Dobbiamo imporre che $x(u,v) = u+v$, $y(u,v) = v$ e $z(u,v)$ verifichino l'equazione cartesiana che definisce Σ per ogni u,v. Deve quindi essere

$$x^2(u,v) + y^2(u,v) = \log_e z(u,v)$$

ossia

$$(u+v)^2 + v^2 = \log_e z(u,v)$$

Quindi

$$z(u,v) = e^{u^2+2v^2+2uv}$$

e l'insieme $D = \mathbb{R}^2$.

Per verificare quali punti di Σ risultano essere regolari usando questa parametrizzazione, dobbiamo cercare i punti $(u,v) \in D$ per cui la matrice Jacobiana di σ ha rango 2. Si trova

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ (2u+2v)e^{u^2+2v^2+2uv} & (4v+2u)e^{u^2+2v^2+2uv} \end{pmatrix}$$

e quindi tutti i punti sono regolari.