Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Test del 15-09-2020

Esercizio 1 (2 punti). Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y}$$

quale affermazione è vera?

- il dominio di f è $\mathbb{R}^2$;
- il limite di $f(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$ è uguale a 0;
- il limite di $f(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$ non esiste;
- $f(1,-1) = -1/2$;
- nessuna delle altre.

Esercizio 2 (3 punti). Dati

$$f(x,y) = 4x^2 + (2y-3)^2$$

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq 2\,,\, x^2 + (y-2)^2 \leq 1\Big\}$$

determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su Ω.

Esercizio 3 (3 punti). Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + y \geq 2\,,\, x^2 + y^2 \leq 4\Big\}$$

Esercizio 4 (1 punto). Dati il campo di vettori $\mathbf{F}$ e la curva (γ, I)

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) = \Big(1+t\,,\, t^2\Big)$$

calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva (γ, I).

Esercizio 5 (1 punto). Data la superficie

$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = z^4 + 1\,,\, -1 \leq z \leq 1\Big\}$$

quale delle seguenti affermazioni è falsa:

- Σ è un insieme limitato;
- Σ è una superficie di rotazione;
- il punto $P = (1,0,0)$ appartiene a Σ;
- non si può scrivere come superficie cartesiana;
- l'area di Σ è nulla.

Risposte

Esercizio 1. La funzione $f(x,y)$ è un rapporto di polinomi e il suo dominio è quindi

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y = 0\}$$

che quindi è più piccolo di $\mathbb{R}^2$. Inoltre $(1,-1) \notin X$. Quindi rimane da studiare il limite di $f(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$. Si trova che il limite esiste ed è uguale a 0 se ci restringiamo agli assi, alle rette della forma $y = \lambda x$, e alle curve del tipo $y = x^\alpha$ con $\alpha > 0$ e $x > 0$. Ma se scegliamo la restrizione $y = -x^2 + x^4$ si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)\,,\, y=-x^2+x^4} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-x^2+x^4)}{x^4} = -1$$

Quindi il limite di $f(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$ non esiste.

Esercizio 2. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

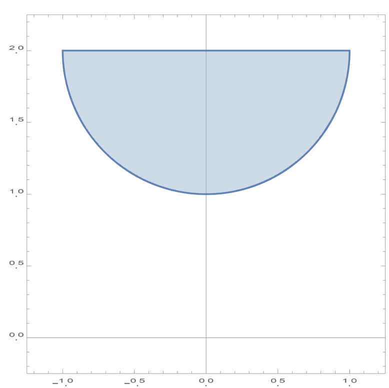

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

La funzione f è un polinomio con dominio naturale $X = \mathbb{R}^2$, e quindi è differenziabile su $\mathbb{R}^2$, e per calcolare le derivate parziali possiamo applicare le usuali regole di derivazione in ogni punto. Per cercare punti critici liberi interni a Ω cerchiamo dunque le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 8x = 0 \\ 4(2y - 3) = 0 \end{cases}$$

che sono interne a Ω. Il sistema ammette come unica soluzione il punto $C = (0, \frac{3}{2})$, che è interno a Ω, e quindi è il primo punto da considerare.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di Ω. Come spigoli indichiamo i punti

$$S_1 = (1\,,\,2) \quad \text{e} \quad S_2 = (-1\,,\,2)$$

e dividiamo il bordo in due parti

$$\Gamma_1 = \{y = 2\,,\, -1 \le x \le 1\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{y = 2 - \sqrt{1 - x^2}\,,\, -1 \le x \le 1\right\}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\,2)\,, \qquad t \in [-1, 1]\,,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 4t^2 + 1\,.$$

Si trova $g_1'(t) = 8t$, che nell'intervallo in considerazione si annulla nel punto 0, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_1(0) = (0\,,\,2)$$

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(t\,,\,2 - \sqrt{1 - t^2}\right), \qquad t \in [-1, 1]\,,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 5 - 4\sqrt{1 - t^2}, \qquad t \in [-1, 1]\,.$$

Si trova $g_2'(t) = \frac{4t}{\sqrt{1-t^2}}$, che nell'intervallo in considerazione si annulla nel punto 0, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_2 = \gamma_2\,(0) = (0\,,\,1)\,.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C) = 0\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = 5\,, \quad f(Q_1) = f(Q_2) = 1\,.$$

Quindi il massimo di f è 5 e il minimo è 0.

Esercizio 3. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

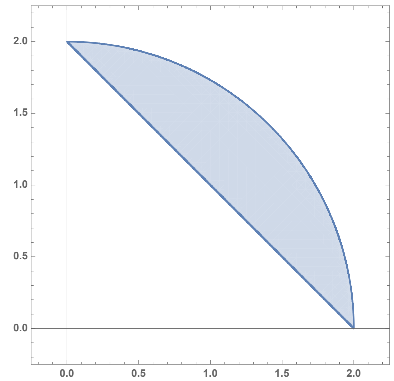

Figure 2: L'insieme Ω.

Vista anche la funzione da integrare, può essere conveniente passare a coordinate polari. Le condizioni che descrivono l'insieme Ω si riscrivono come

$$\rho(\sin\theta + \cos\theta) \geq 2 \quad \text{e} \quad \rho^2 \leq 4$$

Poiché possiamo concludere dalla figura che $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, possiamo scrivere che Ω si ottiene a partire dall'insieme

$$S = \left\{ (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi] \,:\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \,,\, \frac{2}{\sin\theta + \cos\theta} \leq \rho \leq 2 \right\}$$

Quindi

$$\iint_\Omega \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_S (\cos\theta + \sin\theta)\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}^2 (\cos\theta + \sin\theta)\, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta + 2\sin\theta - 2)\; d\theta = 2\,(\sin\theta - \cos\theta - \theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 - \pi\,.$$

Esercizio 4. Il campo di vettori $\mathbf{F}$ è definito su $X = \mathbb{R}^2$ e verifica

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F})(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 1 - 1 = 0\,.$$

Quindi, applicando il Lemma di Poincaré, concludiamo che $\mathbf{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Inoltre un suo potenziale è la funzione $f(x, y) = x^2 + xy$.

La curva (γ, I) non è chiusa, essendo $\gamma(1) = (2, 1) \neq \gamma(0) = (1, 0)$. Quindi per calcolare il lavoro possiamo usare il potenziale $f(x, y)$ e scrivere

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(2, 1) - f(1, 0) = 6 - 1 = 5\,.$$

Esercizio 5. La superficie Σ si può scrivere come una superficie di rotazione, generata dal grafico della funzione $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sqrt{t^4 + 1}$, che ruota intorno all'asse z. Inoltre osserviamo che Σ non si può scrivere come superficie cartesiana rispetto a nessuna delle variabili, come

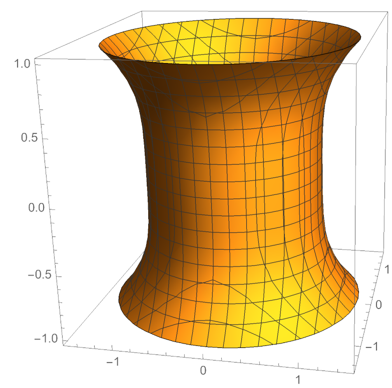

Figure 3: La superficie Σ.

si deduce dal fatto che provando ad isolare una qualunque delle variabili si trovano sempre due possibili scelte del segno.

La superficie Σ è rappresentata nella figura 3.

Dalla figura si deduce nuovamente che non si può scrivere come superficie cartesiana, e anche che si tratta di un insieme limitato in $\mathbb{R}^3$. Infine il punto $P = (1, 0, 0)$ appartiene alla superficie in quanto soddisfa l'equazione e la sua coordinata z è compresa in $[-1, 1]$.

L'unica affermazione che rimane in dubbio riguarda l'area. Il calcolo dell'area di Σ è lungo ma non è richiesto per capire che l'area non può essere nulla, altrimenti Σ sarebbe assimilabile ad una curva.

Per completezza riportiamo i calcoli. Scelta la parametrizzazione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 , \quad \sigma(t, \theta) = (\sqrt{t^4 + 1}\, \cos\theta\, ,\, \sqrt{t^4 + 1}\, \sin\theta\, ,\, t)$$

con

$$D = \{(t, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \,:\, -1 \le t \le 1\} \ ,$$

si ottiene

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{4t^6 + t^4 + 1}\, dt\, d\theta = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4t^6 + t^4 + 1}\, dt \ge 2\pi \int_{-1}^{1} 1\, dt = 4\pi \, .$$

Quindi l'area di Σ è un numero certamente maggiore di 0.