Elementi di Matematica e Statistica
Corso di Laurea in Tecniche per le Costruzioni Civili e la Gestione del Territorio
Compito del 15-01-2026

Esercizio 1. Determinare il dominio naturale D della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{2-x}}$$

e dire come si comporta la funzione agli estremi di D.

Esercizio 2. Trovare gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui a $+\infty$ per la funzione

$$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2-3x}$$

Esercizio 3. Determinare l'insieme C dei punti nel quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x}\,, & \text{se } x > 0; \\ 0\,, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

è continua, e classificare le eventuali discontinuità.

Esercizio 4. Risolvere con il metodo grafico la disequazione

$$|x| + x \leq 3x - 1$$

Esercizio 5. Un campione statistico x contiene i seguenti dati

$$x = \{-3, -3, -1, 0, 2, 2, 4, 4, 4\}$$

Rappresentare il campione con un istogramma, e calcolare media e scarto quadratico medio del campione.

Esercizio 6. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, scrivere l'equazione della retta in $\mathbb{R}^2$ ortogonale al vettore $v = \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}$, e passante per il punto $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ed esprimerla come spazio affine.

Usare la formulazione come spazio affine per determinare per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la retta passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 7. Dire se esiste l'inversa della seguente matrice A e, in caso positivo, determinarla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Dire se il seguente sistema lineare in tre variabili ammette soluzioni, e nel caso determinarle:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ -x + y = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{ES. 1}}$ $$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{2-x}}$$

Il dominio naturale di f è dato da
$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{2x^2}{2-x} \geq 0, \quad 2-x \neq 0 \right\}$$
Poiché $2x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la prima condizione diventa $2 > x$, quindi
$$\underline{D = (-\infty, 2)}$$

Gli estremi di D sono dunque $-\infty$ e 2, e non appartengono a D.
Calcoliamo
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{2x^2}{2-x}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x} \cdot \frac{2}{\frac{2}{x}-1}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x \cdot \frac{2}{-1+\frac{2}{x}}} = \sqrt{(-\infty)\cdot(-2)} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{\frac{2x^2}{2-x}} = \sqrt{\frac{8}{0^+}} = +\infty$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$ $$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2-3x}$$

Il dominio naturale di f è $D = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 3x \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$
Verifichiamo l'esistenza di asintoti a $+\infty$. Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{x^2-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(2+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{2+\frac{1}{x^3}}{1-3/x} = +\infty \cdot 2 = +\infty$$
quindi f non ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. Vediamo se ha un asintoto obliquo. Calcoliamo
$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{x^2-3x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{x^3-3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(2+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x}} = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - ax \right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2x^3+1}{x^2-3x} - 2x \right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x^3+1) - 2x(x^2-3x)}{x^2-3x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+1}{x^2-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(6+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} = 6$$

Quindi f <u>ha asintoto obliquo a $+\infty$ dato da $y = 2x+6$</u>

ES. 3

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

Il dominio naturale di f è $D = \mathbb{R}$. Inoltre su $(0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$, la funzione si scrive come composizione di funzioni continue, quindi f è continua certamente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Resta da valutare come si comporta in 0. Affinché f sia continua in 0, deve verificarsi $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \text{(si tratta di un limite notevole)}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

Quindi $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste. Ne segue che $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e f ha in 0 una discontinuità di prima specie.

ES. 4

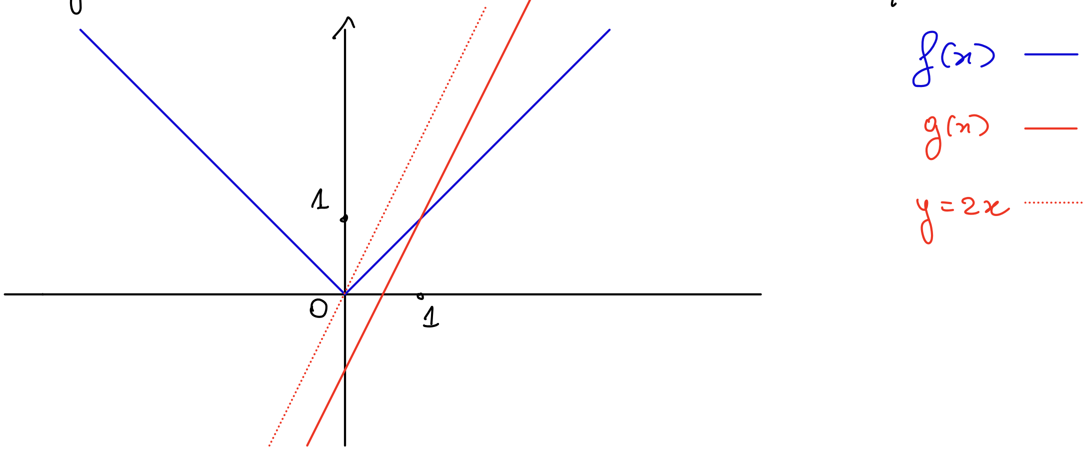
$$|x| + x \le 3x - 1$$

Per ricondurci a funzioni il cui grafico è facile da disegnare, riscriviamo la disequazione come

$$|x| \le 2x - 1$$

e poniamo $f(x) = |x|$, $g(x) = 2x - 1$.

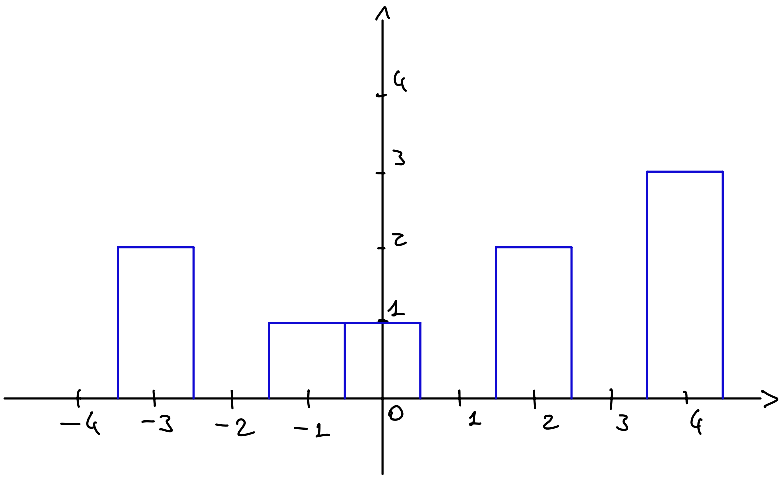
Il grafico di f è noto. Il grafico di g è la retta di equazione $y = 2x - 1$, che è la retta $y = 2x$ traslata in basso di 1. Otteniamo quindi



Quindi $f(x) \leq g(x)$ per $x \in [1, +\infty)$.

ES. 5 $x = \{-3, -3, -1, 0, 2, 2, 4, 4, 4\}$

L'istogramma relativo al campione statistico x è



La media $\bar{x}$ del campione si calcola come

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

dove N è la numerosità del campione, in questo caso $N = 9$, e x_i sono i dati. Quindi

$$\bar{x} = \frac{1}{9}\left(-3-3-1+0+2+2+4+4+4\right) = \frac{9}{9} = 1.$$

Lo scarto quadratico medio $\sigma(x)$ del campione si calcola come

$$\sigma(x) = \sqrt{var(x)}$$

dove $var(x)$ è la varianza del campione, che si può calcolare come

$$var(x) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \bar{x}^2$$

Quindi

$$var(x) = \frac{1}{9}\left((-3)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2\right) - 1^2 = \frac{75}{9} - 1 = \frac{66}{9} = \frac{22}{3}$$

e

$$\sigma(x) = \sqrt{var(x)} = \sqrt{\frac{22}{3}}$$

ES. 6 Siano dati $v = \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

La retta in $\mathbb{R}^2$ ortogonale a v e passante per w ha come equazione
$$<\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, v> = c \iff <\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}> = c \iff kx + 2y = c$$
con $c \in \mathbb{R}$ tale che w sia soluzione. Quindi $c = k \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$.

L'equazione della retta r è quindi
$$\boxed{kx + 2y = 2}$$

Per scriverla come spazio affine dobbiamo trovare lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'omogenea $kx + 2y = 0$, e aggiungere w. Le soluzioni dell'omogenea sono uno spazio vettoriale di dimensione 1, quindi basta trovare una soluzione $u \neq 0$ per avere un vettore che genera lo spazio delle soluzioni. Ad esempio $u = \begin{pmatrix} -2 \\ k \end{pmatrix}$.

Quindi
$$\boxed{r = w + \mathrm{Span}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -2 \\ k \end{pmatrix}}$$

La condizione che la retta passi per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ è equivalente a $P \in r$, ossia
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -2 \\ k \end{pmatrix} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ k \end{pmatrix} \iff$$
$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} 2 = 0 + \lambda \cdot (-2) \\ -2 = 1 + \lambda \cdot (k) \end{cases}$$

Dalla prima equazione si trova $\lambda = -1$, quindi nella seconda si deve verificare che $-2 = 1 + (-1) \cdot k \iff \boxed{k = 3}$.

ES. 7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una matrice ammette inversa se $\det(A) \neq 0$. Calcoliamo il $\det(A)$.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \qquad \det(A) = (1) + (4) + (0) - (0) - (0) - (0) = 5$$

$+$

$-$

Quindi l'inversa di A esiste. Per calcolarla partiamo dalla matrice

$$C = (A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e, tramite le mosse di Gauss sulle righe C_i, la riduciamo a $(I \mid A^{-1})$.

$$C = (A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$C_3 \to C_1 + C_3$ e otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$C_3 \to 2C_2 + C_3$ e otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$C_2 \to 5C_2 - 2C_3$ e otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$C_1 \to 5C_1 + 2C_2$ e otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$C_1 \to \frac{1}{5} C_1$

$C_2 \to \frac{1}{5} C_2$ e otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right)$

$C_3 \to \frac{1}{5} C_3$

che è nella forma $(I \mid A^{-1})$. Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & -4/5 \\ -2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ES. } 8}$

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ -x + y = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare in $N=3$ variabili non omogeneo, con matrice dei coefficienti $A \in M(3\times 3)$ e termine noto $\underline{b}$ dati da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Perché ammette soluzioni deve essere rango A = rango C, dove $C = (A \mid \underline{b})$ è la matrice completa. Calcoliamo il $\det(A)$.

$$\begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix} \qquad \det(A) = \underline{(1)} + \underline{(0)} + \underline{(0)} - \underline{(6)} - \underline{(0)} - \underline{(1)} = -6$$

Poiché $\det(A) \neq 0$, si ha rango$(A) = 3$. Inoltre rango(C) con $C \in M(3\times 4)$ verifica

$$\text{rango}(A) \leq \text{rango}(C) \leq 3$$

quindi rango(C) = rango(A). Quindi il sistema ammette soluzioni. Lo spazio W delle soluzioni è uno spazio affine di dimensione

$$\dim(W) = 3 - \text{rango}(A) = 0,$$

quindi è un solo punto. Per trovare l'unica soluzione, applichiamo le mosse di Gauss alla matrice C.

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$C_3 \to 2C_2 + C_3$ e otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$C_2 \to C_1 + C_2$ e otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$

Scambiamo C_2 e C_3 e otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$C_2 \to 3C_2 - C_3$ e otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$C_1 \to 6C_1 + C_2$ e otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 18 & 16 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$C_1 \to C_1 - 6C_3$ e otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$C_1 \to \frac{1}{6}C_1$
$C_2 \to \frac{1}{6}C_2$ e otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right)$
$C_3 \to \frac{1}{3}C_3$

Quindi il sistema iniziale è equivalente a $\begin{cases} x = 2/3 \\ y = 5/3 \\ z = 2/3 \end{cases}$, e di conseguenza l'unica soluzione è $\boxed{W = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}}$.