

Calcolo delle Probabilità e Statistica
Corso di Laurea in Informatica
Compito del 15-01-2021

Esercizio 1. (8 punti)

Gli aerei moderni sono progettati in modo da poter volare se almeno metà dei motori è funzionante: supponiamo dunque che i motori prodotti da una certa fabbrica abbiano probabilità p di guastarsi, e che gli eventuali guasti su motori diversi siano eventi indipendenti.

- a) Qual è la probabilità che hanno di cadere per guasti ai motori rispettivamente un bimotore ed un quadrimotore?
- b) Dire, in funzione del numero p , se sono più sicuri (cioè se hanno maggiore probabilità di non essere fermati da guasti ai motori) i bimotori o i quadrimotori.

Esercizio 2. (12 punti)

Consideriamo la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

- a) Calcolare la costante c che rende la funzione sopra scritta una densità di probabilità, e scrivere la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria X che abbia quella densità.
- b) Preso $0 < \beta < 1$, dare una formula per il β -quantile della variabile aleatoria sopra scritta e calcolare il momento n -simo $E[X^n]$.
- c) Dopo aver posto $Y_n = (2 + X^n)$, esaminare se la successione $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge in probabilità ed a quale limite.

Esercizio 3. (10 punti)

Il prezzo dell'oro oscilla giornalmente e possiamo considerare il suo prezzo come una variabile gaussiana: negli ultimi 6 mesi il prezzo si è attestato intorno ai 48 € al grammo.

Si ha l'impressione che il prezzo sia calato, e a questo scopo si considerano i dati di 64 giorni consecutivi ottenendo una media campionaria di 47.1 € con deviazione standard campionaria 2.4 €; non è però chiaro se sia una normale fluttuazione o se il prezzo sia veramente diminuito.

- a) Si considera a questo scopo l'ipotesi $H_0) m \geq 48$ contro $H_1) m < 48$: descrivere il test che è opportuno utilizzare, scrivere una formula esatta per il relativo p -value e fornirne una valida approssimazione.
- b) Supponendo che non cambino il numero dei dati e la loro deviazione standard campionaria, dare una stima per una media campionaria con la quale ottenere un p -value uguale a 0.3.

Esercizio 3 per programma precedente. (10 punti)

Consideriamo la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3\}$ (parzialmente) identificata dalla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ ? & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Completare la matrice di transizione inserendo le probabilità di transizione mancanti.
- b) Calcolare le distribuzioni di X_1 , X_2 e X_3 sapendo che $X_0 = 1$.
- c) Calcolare le distribuzioni invarianti.