Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 15-02-2018

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (14 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

i) dire in quali punti del dominio la funzione è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x+y \geq 0\,,\; x^2+y^2 \geq 1\,,\; 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 \leq 0\right\}\,.$$

Suggerimento: è utile sapere che per ogni $(x,y) \in \Omega$, si ha $1 < x^2+y^2 < 4$.

Esercizio 2. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0, 3\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big((2-\cos t)\,\cos t\,,\, \sin t\Big)$$

i) fare un disegno approssimativo del sostegno della curva;

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(-\frac{5}{4}\,,\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

iii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (8 punti) Sia dato l'insieme

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\; (x-1)^2 + y^2 \leq 4\right\}\,;$$

i) descriverlo in coordinate polari $(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi]$;

ii) calcolare l'integrale

$$\iint_U \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,.$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

i) dire in quali punti del dominio la funzione è differenziabile;

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ si può scrivere come composizione delle funzioni $g(t)=\cos t$ e $h(x,y)=\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}$. La funzione g è differenziabile su tutto il suo dominio, e h è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Dunque possiamo concludere dai teoremi di carattere generale che la funzione f è certamente differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Rimane da studiare la differenziabilità in $(0,0)$. Iniziamo studiando l'esistenza delle derivate parziali di f. Usando $\cos s = 1-\frac{1}{2}s^2+o(s^2)$ per $s\to 0$, Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}|t|)-1}{t}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}|t|)-1}{t}=0$$

Dobbiamo poi vedere se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\,.$$

Sostituendo i valori della funzione e delle sue derivate parziali, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+o(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

Dunque la funzione è differenziabile anche in $(0,0)$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x+y\geq 0\,,\,x^2+y^2\geq 1\,,\,5x^2-6xy+5y^2-8\leq 0\right\}\,.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

Abbiamo visto nel punto i) che f non ha punti di non differenziabilità, possiamo quindi cercare i suoi punti critici. Sono l'origine (abbiamo visto che le derivate parziali si annullano) che non appartiene a Ω, e le soluzioni del sistema

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)=0\\ \frac{\pi}{2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)=0\\ (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

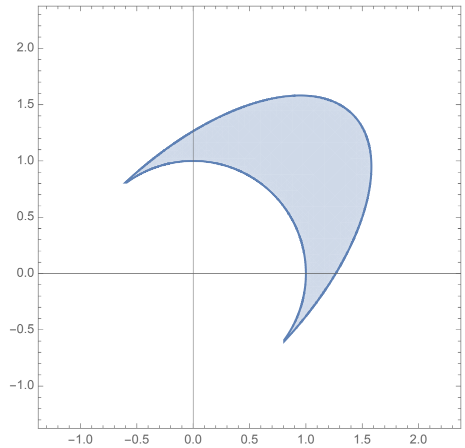

Figure 1: L'insieme Ω.

Usando il suggerimento, si trova che per ogni $(x,y) \in \Omega$ si ha

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) \neq 0$$

dunque non ci sono punti critici liberi nella parte interna di Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$, che dividiamo in due parti,

$$\Gamma_1 = \left\{ x^2+y^2 = 1\,,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

e

$$\Gamma_2 = \left\{ 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0\,,\ x+y \geq 0 \right\}\ .$$

Otteniamo dunque gli spigoli

$$S_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\ .$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (\cos t\,,\ \sin t)\,, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 0\,, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\ .$$

Essendo $g_1(t)$ una funzione costante, tutti i punti sono critici vincolati. Il valore da registrare è quello della funzione, che coincide con il valore della funzione sui due spigoli.

Consideriamo Γ_2 come insieme di livello della funzione differenziabile $G(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$. Il gradiente di G non si annulla su Γ, e possiamo quindi applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\sqrt{x^2+y^2}\right) = \lambda\,(10x - 6y) \\ -\frac{\pi}{2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\sqrt{x^2+y^2}\right) = \lambda\,(10y - 6x) \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

Ponendo $x = 0$, si trova dalla prima equazione $\lambda y = 0$, e quindi $y = 0$ o $\lambda = 0$, mentre dal vincolo si ottiene $y = \sqrt{\frac{8}{5}}$. Deve quindi essere $\lambda = 0$ e $(x, y) = (0, \sqrt{\frac{8}{5}})$, che non è soluzione della seconda equazione. Dunque non ci sono soluzioni con $x = 0$.

Allo stesso modo si esclude che ci siano soluzioni con $y = 0$. Possiamo quindi dividere per x nella prima equazione e per y nella seconda equazione, ottenendo

$$\lambda\,\frac{10x - 6y}{x} = \lambda\,\frac{10y - 6x}{y} \quad \Leftrightarrow \quad 6\,\lambda\,(x^2 - y^2) = 0$$

Otteniamo quindi le soluzioni $\lambda = 0$ e $x^2 = y^2$.

Ponendo $\lambda = 0$ deve essere

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$$

e quindi $x^2 + y^2 = 4$, sostituendo nella terza equazione, si trova quindi il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = 2 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

da cui $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$, e quindi $x^2 = 2$. Dal disegno l'unica soluzione ammissibile è $x = \sqrt{2}$, e quindi $y = \sqrt{2}$. Abbiamo quindi trovato il punto critico vincolato

$$Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ponendo invece $x^2 = y^2$, possiamo innanzitutto considerare $x = y$ (perché $x + y = 0$ solo sugli spigoli), e quindi otteniamo, sostituendo nella terza equazione, $x^2 = 2$, e ritroviamo Q.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = f(S_2) = \cos\frac{\pi}{2} = 0\,, \qquad f(Q) = \cos\pi = -1\,.$$

Dunque il minimo è -1, e il massimo è 0.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [0, 3\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big((2 - \cos t)\,\cos t\,,\,\sin t\Big)$$

i) fare un disegno approssimativo del sostegno della curva;

Il sostegno è rappresentato nella figura 2.

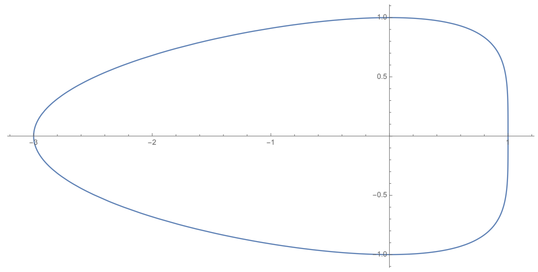

Figure 2: Il sostegno della curva (γ, I).

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(-\frac{5}{4}\,,\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$*;*

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (0, 3\pi)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. Bisogna fare attenzione al fatto che la curva non è semplice. In particolare per $P = \left(-\frac{5}{4}\,,\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (0, 3\pi)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, ossia risolviamo il sistema

$$\begin{cases} (2 - \cos t_0)\, \cos t_0 = -\frac{5}{4} \\[2mm] \sin t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si trovano 4 soluzioni $t_0 = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$. Sostituendo i possibili valori nella prima equazione, si ottiene $t_0 = \frac{2\pi}{3}$ o $t_0 = \frac{8\pi}{3}$. Troviamo due valori perché la curva non è semplice. Il vettore velocità si può calcolare con uno dei due valori.

Calcoliamo quindi il vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} 2\sin t_0\, \cos t_0 - 2\sin t_0 \\[2mm] \cos t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\[2mm] -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

che è lo stesso nel caso $t_0 = \frac{2\pi}{3}$ o $t_0 = \frac{8\pi}{3}$, e non è nullo. Quindi esiste il vettore normale al sostegno nel punto P, dato ad esempio da

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\[2mm] -3\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{4}\right) - 3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0\,.$$

iii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\[2mm] y \end{pmatrix}$$

Il campo $\mathbf{F}$ è differenziabile sul suo dominio naturale $\mathbb{R}^2$, e il rotore del campo è

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = -1\,.$$

Poiché la curva non è chiusa e il campo non è irrotazionale, dunque non è conservativo su alcun dominio, non ci rimane che applicare direttamente la definizione di lavoro, ossia

$$L(\mathbf{F},\gamma) = \int_0^{3\pi} < \mathbf{F}(\gamma(t))\,,\,\gamma'(t) > \,dt = \int_0^{3\pi} < \begin{pmatrix} (2-\cos t)\,\cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\sin t\cos t - 2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} > \,dt =$$

$$= \int_0^{3\pi} \Big(6\sin t\cos^2 t - 3\sin t\cos t - 2\sin t\cos^3 t + 2\sin^2 t\cos t - 2\sin^2 t\Big)\,dt =$$

$$= \Big(-2\cos^3 t + \frac{3}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\cos^4 t + \frac{2}{3}\sin^3 t - t + \sin t\cos t\Big)\Big|_0^{3\pi} = 4 - 3\pi\,.$$

Esercizio 3. *Sia dato l'insieme*

$$U = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\ge 0\,,\,(x-1)^2+y^2\le 4\big\}\ ;$$

i) descriverlo in coordinate polari $(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi]$;

Dobbiamo torvare l'insieme $S\subset[0,+\infty)\times[-\pi,\pi]$ tale che $\psi(S)=U$, dove $\psi(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. Dalla definizione di U troviamo

$$S = \big\{(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi] \,:\, \rho\cos\theta\ge 0\,,\,\rho^2-2\rho\cos\theta-3\le 0\big\}$$

Dalla prima condizione ricaviamo che

$$\theta\in\Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big]\ ,$$

e risolvendo la seconda condizione come una disequazione di secondo grado in ρ, si trova

$$\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta+3} \le \rho \le \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta+3}$$

Poiché $\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta+3} < 0$ per ogni θ, le due condizioni insieme ci dicono che

$$S = \Big\{(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi] \,:\, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\,,\,0\le\rho\le\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}\Big\}$$

L'insieme S è rappresentato nella figura 3, con l'angolo θ sull'asse delle ascisse. Si osserva che è già scritto come insieme semplice rispetto a ρ.

ii) calcolare l'integrale

$$\iint_U \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,.$$

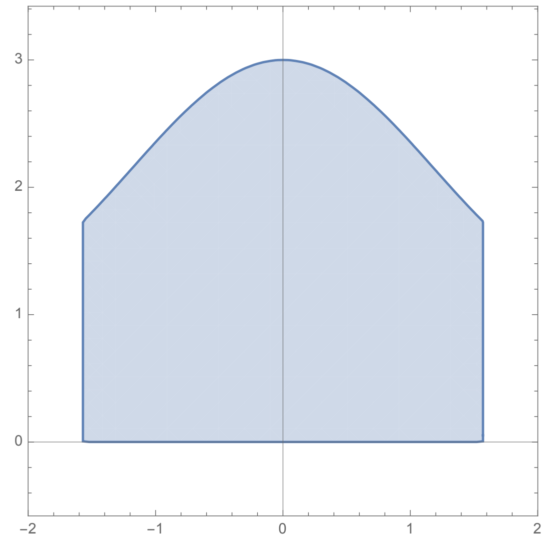

Figure 3: L'insieme S.

Visto che nel punto i) abbiamo scritto l'insieme U in coordinate polari, cambiamo variabile nell'integrale, ottenendo

$$\iint_U \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_S \sin\theta\,\cos\theta\,d\rho\,d\theta =$$

dove S è l'insieme semplice di sopra. Quindi

$$\iint_S \sin\theta\,\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}} \sin\theta\,\cos\theta\,d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\cos\theta\,\left(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}\right)\,d\theta = \left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta - \frac{1}{3}(\cos^2\theta+3)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0\,.$$

Il risultato si poteva ottenere anche dal fatto che l'insieme S è simmetrico rispetto alla riflessione $(x,y)\to(x,-y)$, mentre $f(x,-y) = -f(x,y)$ dove

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$