Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 14-07-2012

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x$$

i) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare

$$\iint_U \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$$

dove

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ \frac{x^2}{2} + \frac{7y^2}{6} \geq 1\right\}$$

Esercizio 3. (15 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\sin^3(t),\, \cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - 1\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto $P = \left(-\frac{3}{8}\sqrt{3},\, -1\right)$;

ii) calcolare il lavoro del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x+2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

lungo la curva (γ, I). (*Suggerimento: potrebbe essere utile studiare le proprietà del campo di vettori.*)

iii) calcolare il lavoro del campo di vettori del punto ii) lungo la curva definita su $I = [0, 2\pi]$ dalla parametrizzazione

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \left(\sin^3(t),\, \cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t)\right)$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile studiare le proprietà del campo di vettori.*)

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x$$

i) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è differenziabile su tutto il suo dominio, quindi cerchiamo i punti in cui si annulla il gradiente. Si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y + 1 \\ 2y + x \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$, si trova che l'unico punto critico libero è

$$P = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Per caratterizzare P possiamo usare la matrice Hessiana di f che è una matrice simmetrica, perché f è almeno di classe C^2 sul dominio. La matrice Hessiana di f è data da

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

che, essendo una matrice costante, è anche $H_f\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Si osserva che $\det\left(H_f\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) = 3 > 0$ e traccia $\left(H_f\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) = 4 > 0$, per cui P è un punto di minimo locale.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \, y \geq 0, \, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

L'insieme da considerare è la parte del primo quadrante interna alla circonferenza unitaria (vedi figura 1). Per studiare massimo e minimo assoluto di f su D dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non differenziabilità e non ci sono punti critici liberi interni a D, infatti P del punto precedente è esterno a D.

Studiamo quindi il comportamento di f sul bordo di D, che consiste di un quarto di circonferenza, $\Gamma_1 = \left\{x^2 + y^2 = 1, \ x \geq 0, \, y \geq 0\right\}$, e di due segmenti $\Gamma_2 = \{0 \leq x \leq 1, \, y = 0\}$ e $\Gamma_3 = \{0 \leq y \leq 1, \, x = 0\}$.

Per studiare la funzione vincolata a Γ_1 utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (si poteva anche usare una parametrizzazione). Dobbiamo quindi cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = \lambda(2x) \\ x + 2y = \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x \geq 0, \, y \geq 0 \end{cases}$$

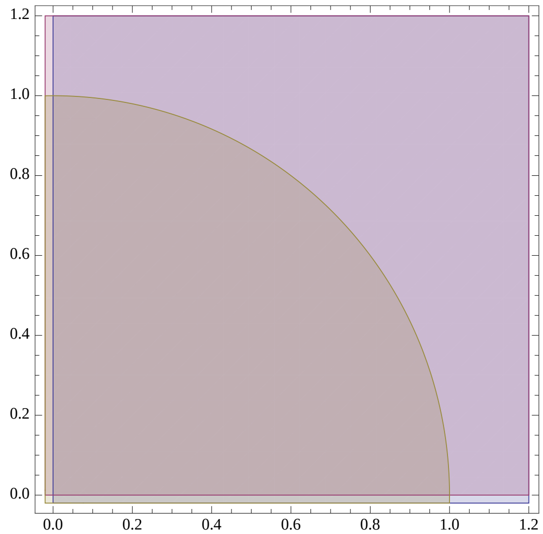

Figure 1: L'insieme D

Scrivendo x in funzione di y, λ nella seconda, sostituendo nella prima, e scrivendo y in funzione di λ, si trova che per $\lambda \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ deve essere

$$x = \frac{2(\lambda - 1)}{4(\lambda - 1)^2 - 1}\,, \qquad y = \frac{1}{4(\lambda - 1)^2 - 1}$$

Sostituendo nella terza, e ricordando le condizioni $x \geq 0$, $y \geq 0$, si trova che l'unica soluzione è $(x, y, \lambda) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Quindi abbiamo trovato il punto critico vincolato

$$Q_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Per $\lambda = \frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{3}{2}$ invece il sistema non ha soluzioni. Quindi lo studio del comportamento di f su Γ_1 è completo.

Per lo studio del comportamento di f su Γ_2 e Γ_3 usiamo le parametrizzazioni

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}\,, \qquad t \in [0, 1]$$

Componiamo con f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = t^2 + t \qquad t \in [0, 1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = t^2 \qquad t \in [0, 1]$$

che sono entrambe strettamente crescenti. Quindi gli unici valori che dobbiamo aggiungere sono quelli dei punti di bordo

$$Q_2 = (1, 0)\,, \qquad Q_3 = (0, 0)\,, \qquad Q_4 = (0, 1)$$

In conclusione, per ottenere il massimo e il minimo di f su D dobbiamo confrontare i valori

$$f(Q_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1, \quad f(Q_2) = 2, \quad f(Q_3) = 0, \quad f(Q_4) = 1$$

da cui si ottiene che

$$\max_D f = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1\,, \qquad \min_D f = 0$$

Esercizio 2. *Calcolare*

$$\iint_U \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

dove

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ \frac{x^2}{2} + \frac{7y^2}{6} \geq 1\right\}$$

L'insieme U su cui integrare è la parte del primo quadrante interna alla circonferenza unitaria ed esterna all'ellisse di semi-assi $\sqrt{2} > 1$ e $\sqrt{\frac{6}{7}} < 1$ (vedi figura 2).

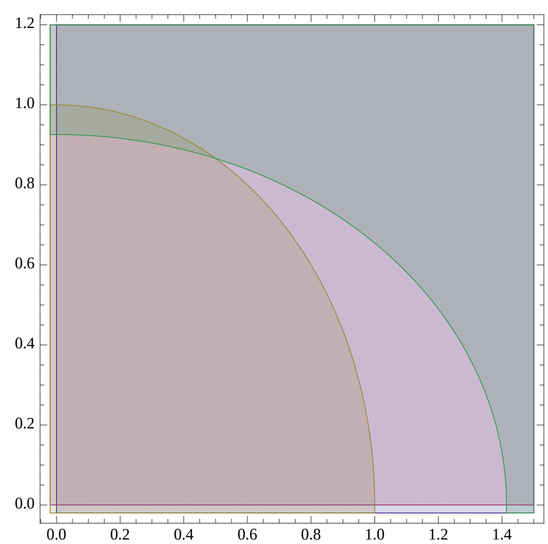

Figure 2: L'insieme U

Vista la forma del dominio e la funzione da integrare, cambiamo variabili e riscriviamo l'integrale utilizzando le coordinate polari $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$. Si ottiene, ricordando che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione in coordinate polari è $\det J = \rho$,

$$\iint_U \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint_\Omega \frac{\rho\cos\phi}{\rho}\,\rho\,d\rho d\phi$$

dove

$$\Omega = \left\{(\rho,\phi) \in (0,\infty)\times[0,2\pi) \ : \ \rho\cos\phi \geq 0,\ \rho\sin\phi \geq 0,\ \rho^2 \leq 1,\ \frac{1}{2}\rho^2\cos^2\phi + \frac{7}{6}\rho^2\sin^2\phi \geq 1\right\} =$$

$$= \left\{ (\rho,\phi) \in (0,\infty)\times[0,2\pi) \;:\; 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\; 0\le\rho\le 1,\; \rho \ge \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sin^2\phi}} \right\} =$$

$$= \left\{ (\rho,\phi) \in (0,\infty)\times[0,2\pi) \;:\; \frac{\pi}{3} \le \phi \le \frac{\pi}{2},\; \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sin^2\phi}} \le \rho \le 1 \right\}$$

L'ultima espressione per Ω è quella corretta che ci permette di scriverlo come insieme semplice rispetto alla variabile ϕ. I vincoli su ϕ discendono dalla condizione

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sin^2\phi}} \le 1$$

che rende compatibile le condizioni per ρ.

Utilizzando quindi la formula di riduzione per insiemi semplici otteniamo

$$\iint_U \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sin^2\phi}}}^{1} \rho\cos\phi\,d\rho \right) d\phi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\rho^2\cos\phi\Big|_{\rho=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sin^2\phi}}}^{\rho=1} \right) d\phi = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos\phi - \frac{\cos\phi}{1+\frac{4}{3}\sin^2\phi} \right) d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\phi\Big|_{\phi=\frac{\pi}{3}}^{\phi=\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan(t)\Big|_{t=1}^{t=\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$$

Esercizio 3. *Data la curva (γ, I), con $I = [0,2\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \left(\sin^3(t),\; \cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - 1 \right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto $P = \left(-\frac{3}{8}\sqrt{3},\, -1\right)$;

Cerchiamo innanzitutto un parametro $t_0 \in [0,2\pi]$ per cui $\gamma(t_0) = P$. Scriviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \sin^3(t_0) = -\frac{3}{8}\sqrt{3} \\ \cos^2(t_0) + \frac{1}{2}\cos(t_0) - 1 = -1 \end{cases}$$

da cui si trova $t_0 = \frac{4}{3}\pi$. Il vettore velocità nel punto P è quindi dato da

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} 3\sin^2(t_0)\cos(t_0) \\ -2\sin(t_0)\cos(t_0) - \frac{1}{2}\sin(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

e, non essendo nullo, rappresenta la base dello spazio tangente alla curva. Quindi l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto P è

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x + \frac{3}{8}\sqrt{3} \right) - \frac{9}{8}(y+1) = 0$$

ii) calcolare il lavoro del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x-y}{x^2+y^2} \\ \\ \frac{x+2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

lungo la curva (γ, I). (*Suggerimento: potrebbe essere utile studiare le proprietà del campo di vettori.*)

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Si trova che

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2x(x+2y)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-x^2-y^2-2y(2x-y)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Quindi il campo è irrotazionale. Per vedere se è conservativo studiamo innanzitutto il suo dominio Ω. Si trova che

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

che non è semplicemente connesso. Dobbiamo quindi studiare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una curva chiusa intorno all'origine. Per semplificare i calcoli scegliamo la curva

$$\chi(t) = \Big(\cos t,\ \sin t\Big) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si ottiene dalla formula

$$L(\mathbf{F}, \chi) = \int_0^{2\pi} < \mathbf{F}(\chi(t)), \chi'(t) > \, dt = \int_0^{2\pi} \Big[-(2\cos t - \sin t)\sin t + (\cos t + 2\sin t)\cos t \Big] \, dt = 2\pi$$

Quindi il campo non è conservativo.

Studiamo adesso la curva (γ, I). Notiamo innanzitutto che la curva è chiusa, ossia $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, ed è di classe C^1. Disegniamo infine il sostegno della curva, vedi figura 3, e deduciamo che la curva è semplice, è percorsa in senso orario e l'origine è contenuta nella parte interna alla curva (basta identificare alcuni punti del sostegno e unirli in maniera approssimativa). Non possiamo allora

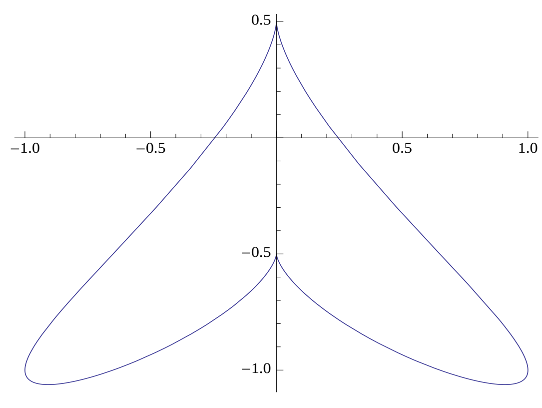

Figure 3: Il sostegno della curva (γ, I)

applicare il Teorema del Rotore, ma possiamo dedurre dalla teoria sui campi di vettori irrotazionali che

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = -L(\mathbf{F}, \chi) = -2\pi$$

dove il segno dipende dalla differenza tra le orientazioni delle due curve.

iii) calcolare il lavoro del campo di vettori del punto ii) lungo la curva definita su $I = [0, 2\pi]$ *dalla parametrizzazione*

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \left(\sin^3(t),\, \cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t)\right)$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile studiare le proprietà del campo di vettori.*)

Studiamo adesso la curva $(\tilde{\gamma}, I)$, che ha le stesse proprietà di (γ, I). L'unica differenza è che adesso il sostegno è traslato nella direzione y. Se infatti disegniamo il sostegno di $(\tilde{\gamma}, I)$ troviamo la figura 4, e quindi la curva è semplice, è percorsa in senso orario e l'origine stavolta non è contenuta nella parte interna U alla curva (basta identificare alcuni punti del sostegno e unirli in maniera approssimativa). Possiamo allora applicare il Teorema del Rotore e dedurre che

$$L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = -\iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x, y)\, dxdy = 0$$

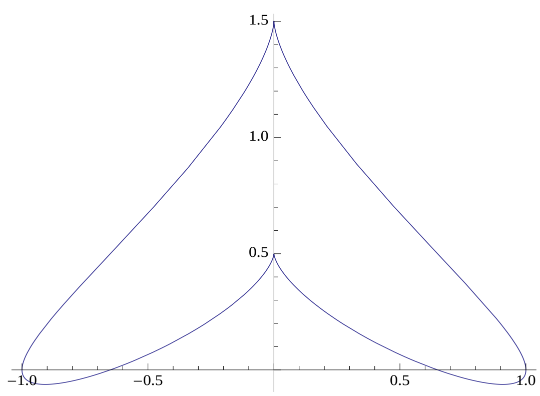

Figure 4: Il sostegno della curva $(\tilde{\gamma}, I)$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 14-07-2012

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + xy + y$$

i) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + 4y^2 \leq 1\big\}$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare

$$\iint_U \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$$

dove

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ \frac{3x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq 1\right\}$$

Esercizio 3. (15 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \left(\cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t),\, \sin^3(t)\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto $P = \big(0, \frac{3}{8}\sqrt{3}\big)$;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x-y}{x^2+y^2} \\ \\ \frac{x+2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile studiare le proprietà del campo di vettori.*)

iii) calcolare il lavoro del campo di vettori del punto ii) lungo la curva di parametrizzazione γ come sopra, ma ristretta all'intervallo $\tilde{I} = \big[0, \frac{\pi}{4}\big]$.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + xy + y$$

i) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è differenziabile su tutto il suo dominio, quindi cerchiamo i punti in cui si annulla il gradiente. Si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x + y \\ -8y + x + 1 \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$, si trova che l'unico punto critico libero è

$$P = \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}\right)$$

Per caratterizzare P possiamo usare la matrice Hessiana di f che è una matrice simmetrica, perché f è almeno di classe C^2 sul dominio. La matrice Hessiana di f è data da

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$$

che, essendo una matrice costante, è anche $H_f\left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}\right)$. Si osserva che $\det\left(H_f\left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}\right)\right) = 15 > 0$ e traccia $\left(H_f\left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}\right)\right) = -10 < 0$, per cui P è un punto di massimo locale.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + 4y^2 \leq 1\right\}$$

L'insieme da considerare è la parte del primo quadrante interna all'ellisse di semi-assi 1 e $\frac{1}{2}$ (vedi figura 5). Per studiare massimo e minimo assoluto di f su D dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non differenziabilità, ma il punto critico $P = \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}\right)$ è interno a D, quindi il valore $f(P)$ va preso in considerazione.

Studiamo quindi il comportamento di f sul bordo di D, che consiste di un quarto di ellisse, $\Gamma_1 = \left\{x^2 + 4y^2 = 1,\ x \geq 0,\, y \geq 0\right\}$, e di due segmenti $\Gamma_2 = \{0 \leq x \leq 1,\, y = 0\}$ e $\Gamma_3 = \left\{0 \leq y \leq \frac{1}{2},\, x = 0\right\}$.

Per studiare la funzione vincolata a Γ_1 utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (si poteva anche usare una parametrizzazione). Dobbiamo quindi cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} -2x + y = \lambda(2x) \\ x - 8y + 1 = \lambda(8y) \\ x^2 + 4y^2 = 1 \\ x \geq 0,\, y \geq 0 \end{cases}$$

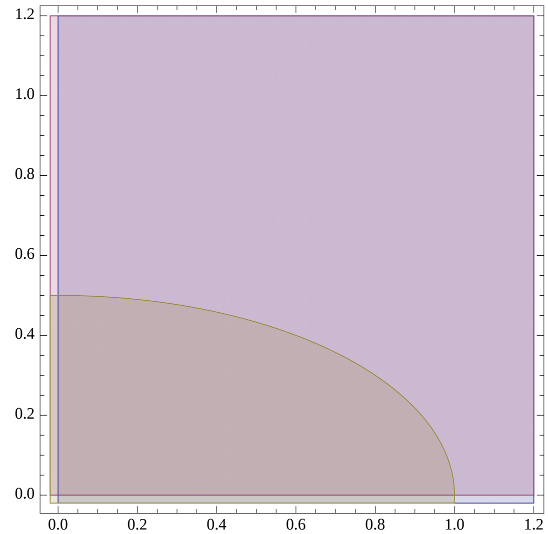

Figure 5: L'insieme D

Scrivendo y in funzione di x, λ nella prima, sostituendo nella seconda, e scrivendo x in funzione di λ, si trova che per $\lambda \neq -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}$ deve essere

$$x = \frac{1}{16(\lambda+1)^2 - 1}, \qquad y = \frac{2(\lambda+1)}{16(\lambda+1)^2 - 1}$$

Sostituendo nella terza, e ricordando le condizioni $x \geq 0$, $y \geq 0$, si trova che l'unica soluzione è $(x, y, \lambda) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Quindi abbiamo trovato il punto critico vincolato

$$Q_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Per $\lambda = -\frac{3}{4}$ e $\lambda = -\frac{5}{4}$ invece il sistema non ha soluzioni. Quindi lo studio del comportamento di f su Γ_1 è completo.

Per lo studio del comportamento di f su Γ_2 e Γ_3 usiamo le parametrizzazioni

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1]$$

Componiamo con f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = -t^2 \qquad t \in [0, 1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = -t^2 + \frac{1}{2}t \qquad t \in [0, 1]$$

La funzione g_2 è descrescente, mentre la funzione g_3 ha un punto critico (massimo assoluto) in $\bar{t} = \frac{1}{4}$. Quindi i valori che dobbiamo considerare sono quelli nel punto

$$Q_2 = \gamma_3 \left(\frac{1}{4}\right) = \left(0,\, \frac{1}{8}\right)$$

e quelli dei punti di bordo

$$Q_3 = (1,\, 0)\ , \qquad Q_4 = (0,\, 0)\ , \qquad Q_5 = \left(0,\, \frac{1}{2}\right)$$

In conclusione, per ottenere il massimo e il minimo di f su D dobbiamo confrontare i valori

$$f(P) = \frac{1}{15}, \quad f(Q_1) = \frac{3\sqrt{3}}{8} - 1, \quad f(Q_2) = \frac{1}{16}$$

$$f(Q_3) = -1, \quad f(Q_4) = 0, \quad f(Q_5) = -\frac{1}{2}$$

da cui si ottiene che

$$\max_D f = \frac{1}{15}\,, \qquad \min_D f = -1$$

Esercizio 2. *Calcolare*

$$\iint_U \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy$$

dove

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ \frac{3x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq 1\right\}$$

L'insieme U su cui integrare è la parte del primo quadrante interna alla circonferenza unitaria ed esterna all'ellisse di semi-assi $\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$ e $\sqrt{2} > 1$ (vedi figura 6).

Vista la forma del dominio e la funzione da integrare, cambiamo variabili e riscriviamo l'integrale utilizzando le coordinate polari $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$. Si ottiene, ricordando che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione in coordinate polari è $\det J = \rho$,

$$\iint_U \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \iint_\Omega \frac{\rho\sin\phi}{\rho}\,\rho\, d\rho d\phi$$

dove

$$\Omega = \left\{(\rho,\phi) \in (0,\infty)\times[0,2\pi) \ :\ \rho\cos\phi \geq 0,\ \rho\sin\phi \geq 0,\ \rho^2 \leq 1,\ \frac{3}{2}\rho^2\cos^2\phi + \frac{1}{2}\rho^2\sin^2\phi \geq 1\right\} =$$

$$= \left\{(\rho,\phi) \in (0,\infty)\times[0,2\pi) \ :\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 1,\ \rho \geq \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\cos^2\phi}}\right\} =$$

$$= \left\{(\rho,\phi) \in (0,\infty)\times[0,2\pi) \ :\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4},\ \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\cos^2\phi}} \leq \rho \leq 1\right\}$$

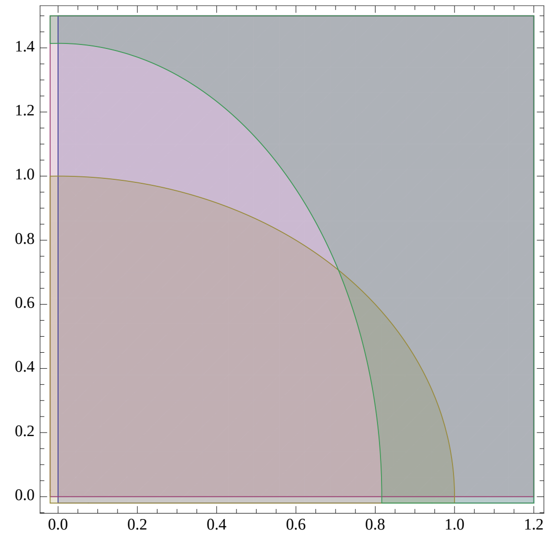

Figure 6: L'insieme U

L'ultima espressione per Ω è quella corretta che ci permette di scriverlo come insieme semplice rispetto alla variabile ϕ. I vincoli su ϕ discendono dalla condizione

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\cos^2\phi}} \leq 1$$

che rende compatibile le condizioni per ρ.

Utilizzando quindi la formula di riduzione per insiemi semplici otteniamo

$$\iint_U \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\cos^2\phi}}}^1 \rho\sin\phi\,d\rho \right) d\phi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\rho^2\sin\phi\Big|_{\rho=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\cos^2\phi}}}^{\rho=1} \right) d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\sin\phi - \frac{\sin\phi}{1+2\cos^2\phi} \right) d\phi =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\phi\Big|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(t)\Big|_{t=1}^{t=\sqrt{2}} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

Esercizio 3. *Data la curva (γ, I), con $I=[0,2\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t),\, \sin^3(t) \right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto $P = \left(0, \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)$;

Cerchiamo innanzitutto un parametro $t_0 \in [0, 2\pi]$ per cui $\gamma(t_0) = P$. Scriviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \cos^2(t_0) + \frac{1}{2}\cos(t_0) = 0 \\ \sin^3(t_0) = \frac{3}{8}\sqrt{3} \end{cases}$$

da cui si trova $t_0 = \frac{2}{3}\pi$. Il vettore velocità nel punto P è quindi dato da

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -2\sin(t_0)\cos(t_0) - \frac{1}{2}\sin(t_0) \\ 3\sin^2(t_0)\cos(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

e, non essendo nullo, rappresenta la base dello spazio tangente alla curva. Quindi l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto P è

$$\frac{9}{8}(x - 0) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(y - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right) = 0$$

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x+2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile studiare le proprietà del campo di vettori.*)

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Si trova che

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2x(x + 2y)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 - y^2 - 2y(2x - y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Quindi il campo è irrotazionale. Per vedere se è conservativo studiamo innanzitutto il suo dominio Ω. Si trova che

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

che non è semplicemente connesso. Dobbiamo quindi studiare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una curva chiusa intorno all'origine. Per semplificare i calcoli scegliamo la curva

$$\chi(t) = \Big(\cos t,\ \sin t\Big) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si ottiene dalla formula

$$L(\mathbf{F}, \chi) = \int_0^{2\pi} < \mathbf{F}(\chi(t)), \chi'(t) > \, dt = \int_0^{2\pi} \Big[-(2\cos t - \sin t)\sin t + (\cos t + 2\sin t)\cos t \Big]\, dt = 2\pi$$

Quindi il campo non è conservativo.

Studiamo adesso la curva (γ, I). Notiamo innanzitutto che la curva è chiusa, ossia $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, ed è di classe C^1. Disegniamo infine il sostegno della curva, vedi figura 7, e deduciamo che la curva è semplice, è percorsa in senso anti-orario e l'origine non è contenuta nella parte interna U alla

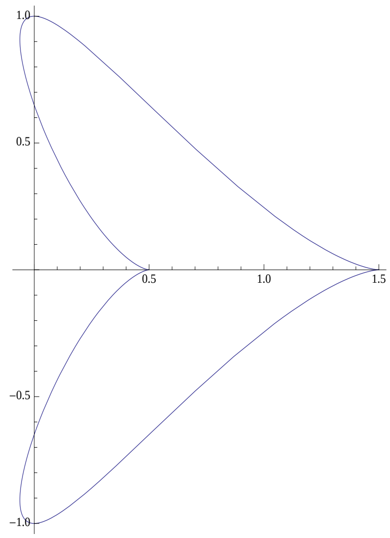

Figure 7: Il sostegno della curva (γ, I)

curva (basta identificare alcuni punti del sostegno e unirli in maniera approssimativa). Possiamo allora applicare il Teorema del Rotore e dedurre che

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \iint_U \operatorname{rot}(\mathbf{F})(x, y)\, dxdy = 0$$

iii) calcolare il lavoro del campo di vettori del punto ii) lungo la curva di parametrizzazione γ come sopra, ma ristretta all'intervallo $\tilde{I} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Ristretto all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, il sostegno di γ risulta essere interamente contenuto nel semi-piano $\tilde{\Omega} = \{x > 0\}$. Quindi possiamo restringere il nostro campo a $\tilde{\Omega}$, che è un insieme semplicemente connesso. Se ne deduce che esiste un potenziale f per $\mathbf{F}$ su $\tilde{\Omega}$, ossia esiste una funzione che risolve il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x+2y}{x^2+y^2} \end{cases} \qquad \forall\, (x, y) \in \tilde{\Omega}$$

Integrando nella prima equazione rispetto a x e sostituendo poi nella seconda, si trova che un possibile potenziale di $\mathbf{F}$ su $\tilde{\Omega}$ è la funzione

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2) + \arctan \frac{y}{x}$$

Quindi possiamo calcolare

$$L(\mathbf{F}, \gamma\Big|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]}) = f\left(\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - f(\gamma(0)) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) - f\left(\frac{3}{2}, 0\right) =$$

$$= \log\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \arctan(\sqrt{2} - 1) - \log \frac{9}{4}$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 14-07-2012

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = -4x^2 - y^2 + xy + x$$

i) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\, y \geq 0,\, 4x^2 + y^2 \leq 1\big\}$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare

$$\iint_U \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$$

dove

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ \frac{7x^2}{6} + \frac{y^2}{2} \geq 1\right\}$$

Esercizio 3. (15 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t),\, \sin^3(t)\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto $P = \big(0, \frac{3}{8}\sqrt{3}\big)$;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x+2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile studiare le proprietà del campo di vettori.*)

iii) calcolare il lavoro del campo di vettori del punto ii) lungo la curva di parametrizzazione γ come sopra, ma ristretta all'intervallo $\tilde{I} = \big[0, \frac{\pi}{4}\big]$.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = -4x^2 - y^2 + xy + x$$

i) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è differenziabile su tutto il suo dominio, quindi cerchiamo i punti in cui si annulla il gradiente. Si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -8x + y + 1 \\ -2y + x \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$, si trova che l'unico punto critico libero è

$$P = \left(\frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)$$

Per caratterizzare P possiamo usare la matrice Hessiana di f che è una matrice simmetrica, perché f è almeno di classe C^2 sul dominio. La matrice Hessiana di f è data da

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

che, essendo una matrice costante, è anche $H_f\left(\frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)$. Si osserva che $\det\left(H_f\left(\frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)\right) = 15 > 0$ e $\operatorname{traccia}\left(H_f\left(\frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)\right) = -10 < 0$, per cui P è un punto di massimo locale.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\, y \geq 0,\, 4x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

L'insieme da considerare è la parte del primo quadrante interna all'ellisse di semi-assi $\frac{1}{2}$ e 1 (vedi figura 8). Per studiare massimo e minimo assoluto di f su D dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non differenziabilità, ma il punto critico $P = \left(\frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)$ è interno a D, quindi il valore $f(P)$ va preso in considerazione.

Studiamo quindi il comportamento di f sul bordo di D, che consiste di un quarto di ellisse, $\Gamma_1 = \left\{4x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$, e di due segmenti $\Gamma_2 = \left\{0 \leq x \leq \frac{1}{2},\, y = 0\right\}$ e $\Gamma_3 = \{0 \leq y \leq 1,\, x = 0\}$.

Per studiare la funzione vincolata a Γ_1 utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (si poteva anche usare una parametrizzazione). Dobbiamo quindi cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} -8x + y + 1 = \lambda(8x) \\ x - 2y = \lambda(2y) \\ 4x^2 + y^2 = 1 \\ x \geq 0,\, y \geq 0 \end{cases}$$

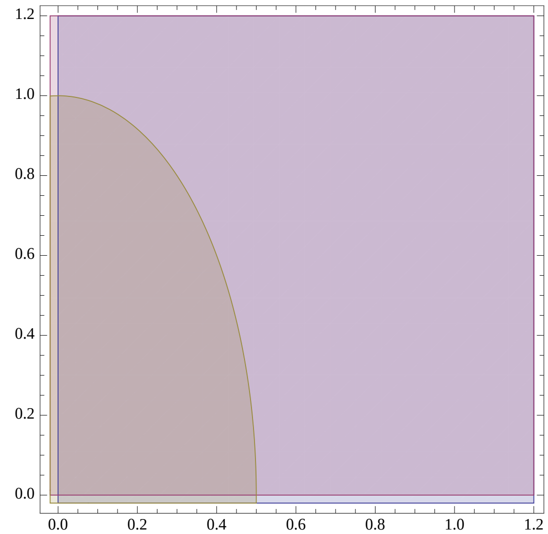

Figure 8: L'insieme D

Scrivendo x in funzione di y, λ nella seconda, sostituendo nella prima, e scrivendo y in funzione di λ, si trova che per $\lambda \neq -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}$ deve essere

$$x = \frac{2(\lambda+1)}{16(\lambda+1)^2 - 1}\,, \qquad y = \frac{1}{16(\lambda+1)^2 - 1}$$

Sostituendo nella terza, e ricordando le condizioni $x \geq 0$, $y \geq 0$, si trova che l'unica soluzione è $(x, y, \lambda) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, -1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Quindi abbiamo trovato il punto critico vincolato

$$Q_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Per $\lambda = -\frac{3}{4}$ e $\lambda = -\frac{5}{4}$ invece il sistema non ha soluzioni. Quindi lo studio del comportamento di f su Γ_1 è completo.

Per lo studio del comportamento di f su Γ_2 e Γ_3 usiamo le parametrizzazioni

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1]$$

Componiamo con f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = -t^2 + \frac{1}{2}t \qquad t \in [0, 1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = -t^2 \qquad t \in [0, 1]$$

La funzione g_3 è descrescente, mentre la funzione g_2 ha un punto critico (massimo assoluto) in $\bar{t} = \frac{1}{4}$. Quindi i valori che dobbiamo considerare sono quelli nel punto

$$Q_2 = \gamma_2\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{8},\, 0\right)$$

e quelli dei punti di bordo

$$Q_3 = \left(\frac{1}{2},\, 0\right)\,, \qquad Q_4 = (0,\, 0)\,, \qquad Q_5 = (0,\, 1)$$

In conclusione, per ottenere il massimo e il minimo di f su D dobbiamo confrontare i valori

$$f(P) = \frac{1}{15}, \quad f(Q_1) = \frac{3\sqrt{3}}{8} - 1, \quad f(Q_2) = \frac{1}{16}$$

$$f(Q_3) = -\frac{1}{2}, \quad f(Q_4) = 0, \quad f(Q_5) = -1$$

da cui si ottiene che

$$\max_D f = \frac{1}{15}\,, \qquad \min_D f = -1$$

Esercizio 2. *Calcolare*

$$\iint_U \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$$

dove

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ \frac{7x^2}{6} + \frac{y^2}{2} \geq 1\right\}$$

L'insieme U su cui integrare è la parte del primo quadrante interna alla circonferenza unitaria ed esterna all'ellisse di semi-assi $\sqrt{\frac{6}{7}} < 1$ e $\sqrt{2} > 1$ (vedi figura 9).

Vista la forma del dominio e la funzione da integrare, cambiamo variabili e riscriviamo l'integrale utilizzando le coordinate polari $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$. Si ottiene, ricordando che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione in coordinate polari è $\det J = \rho$,

$$\iint_U \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \iint_\Omega \frac{\rho\sin\phi}{\rho}\, \rho\, d\rho d\phi$$

dove

$$\Omega = \left\{(\rho,\phi) \in (0,\infty)\times[0,2\pi) \ : \ \rho\cos\phi \geq 0,\ \rho\sin\phi \geq 0,\ \rho^2 \leq 1,\ \frac{7}{6}\rho^2\cos^2\phi + \frac{1}{2}\rho^2\sin^2\phi \geq 1\right\} =$$

$$= \left\{(\rho,\phi) \in (0,\infty)\times[0,2\pi) \ : \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 1,\ \rho \geq \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cos^2\phi}}\right\} =$$

$$= \left\{(\rho,\phi) \in (0,\infty)\times[0,2\pi) \ : \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6},\ \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cos^2\phi}} \leq \rho \leq 1\right\}$$

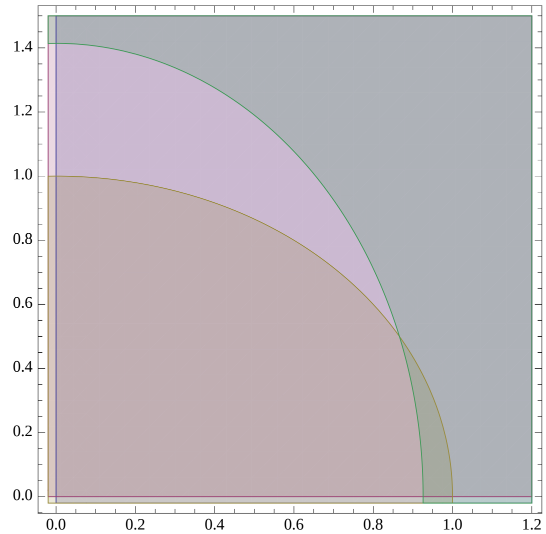

Figure 9: L'insieme U

L'ultima espressione per Ω è quella corretta che ci permette di scriverlo come insieme semplice rispetto alla variabile ϕ. I vincoli su ϕ discendono dalla condizione

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cos^2\phi}} \leq 1$$

che rende compatibile le condizioni per ρ.

Utilizzando quindi la formula di riduzione per insiemi semplici otteniamo

$$\iint_U \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_{\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cos^2\phi}}}^{1} \rho\sin\phi\,d\rho \right) d\phi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}\rho^2\sin\phi\Big|_{\rho=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cos^2\phi}}}^{\rho=1} \right) d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}\sin\phi - \frac{\sin\phi}{1+\frac{4}{3}\cos^2\phi} \right) d\phi =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\phi\Big|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{6}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\arctan(t)\Big|_{t=1}^{t=\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\arctan\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$$

Esercizio 3. *Data la curva* (γ, I), *con* $I = [0, 2\pi]$ *e parametrizzazione*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t),\, \sin^3(t)\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di (γ, I) *nel punto* $P = \left(0, \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)$;

Cerchiamo innanzitutto un parametro $t_0 \in [0, 2\pi]$ per cui $\gamma(t_0) = P$. Scriviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \cos^2(t_0) + \frac{1}{2}\cos(t_0) = 0 \\ \sin^3(t_0) = \frac{3}{8}\sqrt{3} \end{cases}$$

da cui si trova $t_0 = \frac{2}{3}\pi$. Il vettore velocità nel punto P è quindi dato da

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -2\sin(t_0)\cos(t_0) - \frac{1}{2}\sin(t_0) \\ 3\sin^2(t_0)\cos(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

e, non essendo nullo, rappresenta la base dello spazio tangente alla curva. Quindi l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto P è

$$\frac{9}{8}(x - 0) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(y - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right) = 0$$

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x+2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile studiare le proprietà del campo di vettori.*)

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Si trova che

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2x(x + 2y)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 - y^2 - 2y(2x - y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Quindi il campo è irrotazionale. Per vedere se è conservativo studiamo innanzitutto il suo dominio Ω. Si trova che

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

che non è semplicemente connesso. Dobbiamo quindi studiare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una curva chiusa intorno all'origine. Per semplificare i calcoli scegliamo la curva

$$\chi(t) = \Big(\cos t,\ \sin t\Big) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si ottiene dalla formula

$$L(\mathbf{F}, \chi) = \int_0^{2\pi} < \mathbf{F}(\chi(t)), \chi'(t) > dt = \int_0^{2\pi} \Big[- (2\cos t - \sin t)\sin t + (\cos t + 2\sin t)\cos t \Big] dt = 2\pi$$

Quindi il campo non è conservativo.

Studiamo adesso la curva (γ, I). Notiamo innanzitutto che la curva è chiusa, ossia $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, ed è di classe C^1. Disegniamo infine il sostegno della curva, vedi figura 10, e deduciamo che la curva è semplice, è percorsa in senso anti-orario e l'origine non è contenuta nella parte interna U alla

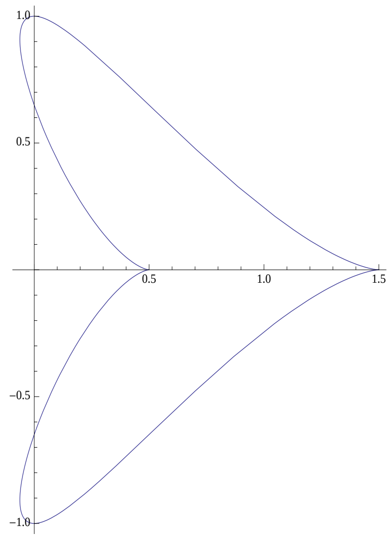

Figure 10: Il sostegno della curva (γ, I)

curva (basta identificare alcuni punti del sostegno e unirli in maniera approssimativa). Possiamo allora applicare il Teorema del Rotore e dedurre che

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x, y)\, dxdy = 0$$

iii) calcolare il lavoro del campo di vettori del punto ii) lungo la curva di parametrizzazione γ come sopra, ma ristretta all'intervallo $\tilde{I} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Ristretto all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, il sostegno di γ risulta essere interamente contenuto nel semi-piano $\tilde{\Omega} = \{x > 0\}$. Quindi possiamo restringere il nostro campo a $\tilde{\Omega}$, che è un insieme semplicemente connesso. Se ne deduce che esiste un potenziale f per $\mathbf{F}$ su $\tilde{\Omega}$, ossia esiste una funzione che risolve il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x+2y}{x^2+y^2} \end{cases} \qquad \forall\, (x, y) \in \tilde{\Omega}$$

Integrando nella prima equazione rispetto a x e sostituendo poi nella seconda, si trova che un possibile potenziale di $\mathbf{F}$ su $\tilde{\Omega}$ è la funzione

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2) + \arctan \frac{y}{x}$$

Quindi possiamo calcolare

$$L(\mathbf{F}, \gamma\Big|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]}) = f\left(\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - f(\gamma(0)) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) - f\left(\frac{3}{2}, 0\right) =$$

$$= \log\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \arctan(\sqrt{2} - 1) - \log\frac{9}{4}$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 14-07-2012

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + y$$

i) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\big\}$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare

$$\iint_U \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$$

dove

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ \frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} \geq 1\right\}$$

Esercizio 3. (15 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\sin^3(t),\, \cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - 1\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto $P = \big(-\frac{3}{8}\sqrt{3},\, -1\big)$;

ii) calcolare il lavoro del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x+2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

lungo la curva (γ, I). (*Suggerimento: potrebbe essere utile studiare le proprietà del campo di vettori.*)

iii) calcolare il lavoro del campo di vettori del punto ii) lungo la curva definita su $I = [0, 2\pi]$ dalla parametrizzazione

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \left(\sin^3(t),\, \cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t)\right)$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile studiare le proprietà del campo di vettori.*)

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + y$$

i) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è differenziabile su tutto il suo dominio, quindi cerchiamo i punti in cui si annulla il gradiente. Si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + x + 1 \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$, si trova che l'unico punto critico libero è

$$P = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Per caratterizzare P possiamo usare la matrice Hessiana di f che è una matrice simmetrica, perché f è almeno di classe C^2 sul dominio. La matrice Hessiana di f è data da

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

che, essendo una matrice costante, è anche $H_f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Si osserva che $\det\left(H_f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right) = 3 > 0$ e traccia $\left(H_f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right) = 4 > 0$, per cui P è un punto di minimo locale.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

L'insieme da considerare è la parte del primo quadrante interna alla circonferenza unitaria (vedi figura 11). Per studiare massimo e minimo assoluto di f su D dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non differenziabilità e non ci sono punti critici liberi interni a D, infatti P del punto precedente è esterno a D.

Studiamo quindi il comportamento di f sul bordo di D, che consiste di un quarto di circonferenza, $\Gamma_1 = \left\{x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\, y \geq 0\right\}$, e di due segmenti $\Gamma_2 = \{0 \leq x \leq 1,\, y = 0\}$ e $\Gamma_3 = \{0 \leq y \leq 1,\, x = 0\}$.

Per studiare la funzione vincolata a Γ_1 utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (si poteva anche usare una parametrizzazione). Dobbiamo quindi cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda(2x) \\ x + 2y + 1 = \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x \geq 0,\, y \geq 0 \end{cases}$$

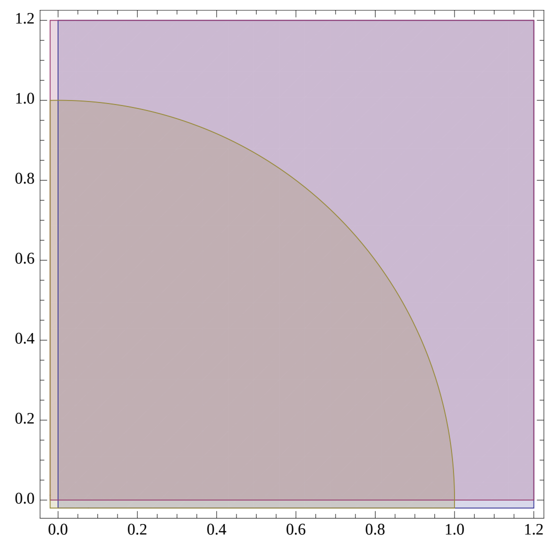

Figure 11: L'insieme D

Scrivendo y in funzione di x, λ nella prima, sostituendo nella seconda, e scrivendo x in funzione di λ, si trova che per $\lambda \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ deve essere

$$x = \frac{1}{4(\lambda - 1)^2 - 1}\,, \qquad y = \frac{2(\lambda - 1)}{4(\lambda - 1)^2 - 1}$$

Sostituendo nella terza, e ricordando le condizioni $x \geq 0$, $y \geq 0$, si trova che l'unica soluzione è $(x, y, \lambda) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Quindi abbiamo trovato il punto critico vincolato

$$Q_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Per $\lambda = \frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{3}{2}$ invece il sistema non ha soluzioni. Quindi lo studio del comportamento di f su Γ_1 è completo.

Per lo studio del comportamento di f su Γ_2 e Γ_3 usiamo le parametrizzazioni

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}\,, \qquad t \in [0, 1]$$

Componiamo con f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = t^2 \qquad t \in [0, 1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = t^2 + t \qquad t \in [0, 1]$$

che sono entrambe strettamente crescenti. Quindi gli unici valori che dobbiamo aggiungere sono quelli dei punti di bordo

$$Q_2 = (1,\, 0)\,, \qquad Q_3 = (0,\, 0)\,, \qquad Q_4 = (0,\, 1)$$

In conclusione, per ottenere il massimo e il minimo di f su D dobbiamo confrontare i valori

$$f(Q_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1, \quad f(Q_2) = 1, \quad f(Q_3) = 0, \quad f(Q_4) = 2$$

da cui si ottiene che

$$\max_D f = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1\,, \qquad \min_D f = 0$$

Esercizio 2. *Calcolare*

$$\iint_U \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$$

dove

$$U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; x^2+y^2 \leq 1,\; \frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} \geq 1 \right\}$$

L'insieme U su cui integrare è la parte del primo quadrante interna alla circonferenza unitaria ed esterna all'ellisse di semi-assi $\sqrt{2} > 1$ e $\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$ (vedi figura 12).

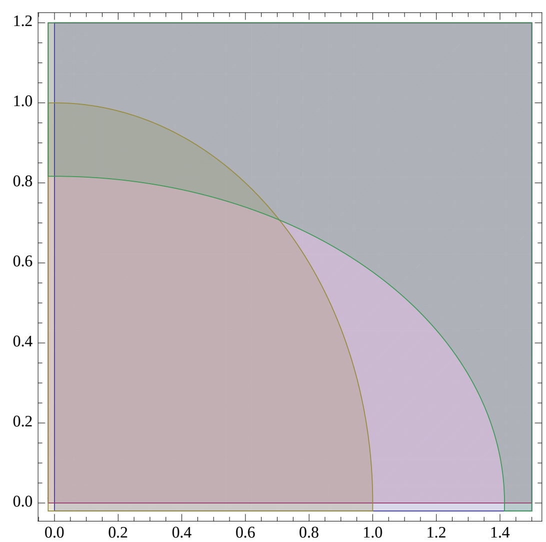

Figure 12: L'insieme U

Vista la forma del dominio e la funzione da integrare, cambiamo variabili e riscriviamo l'integrale utilizzando le coordinate polari $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$. Si ottiene, ricordando che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione in coordinate polari è $\det J = \rho$,

$$\iint_U \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \iint_\Omega \frac{\rho\cos\phi}{\rho}\, \rho\, d\rho d\phi$$

dove

$$\Omega = \left\{ (\rho,\phi) \in (0,\infty)\times[0,2\pi) \;:\; \rho\cos\phi \geq 0,\; \rho\sin\phi \geq 0,\; \rho^2 \leq 1,\; \frac{1}{2}\rho^2\cos^2\phi + \frac{3}{2}\rho^2\sin^2\phi \geq 1 \right\} =$$

$$= \left\{ (\rho,\phi) \in (0,\infty) \times [0,2\pi) \ : \ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \ 0 \le \rho \le 1, \ \rho \ge \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} + \sin^2\phi}} \right\} =$$

$$= \left\{ (\rho,\phi) \in (0,\infty) \times [0,2\pi) \ : \ \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \ \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} + \sin^2\phi}} \le \rho \le 1 \right\}$$

L'ultima espressione per Ω è quella corretta che ci permette di scriverlo come insieme semplice rispetto alla variabile ϕ. I vincoli su ϕ discendono dalla condizione

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} + \sin^2\phi}} \le 1$$

che rende compatibile le condizioni per ρ.

Utilizzando quindi la formula di riduzione per insiemi semplici otteniamo

$$\iint_U \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\sin^2\phi}}}^{1} \rho\cos\phi \, d\rho \right) d\phi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\rho^2\cos\phi \Big|_{\rho=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\sin^2\phi}}}^{\rho=1} \right) d\phi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos\phi - \frac{\cos\phi}{1+2\sin^2\phi} \right) d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\phi\Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}}^{\phi=\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(t)\Big|_{t=1}^{t=\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

Esercizio 3. *Data la curva (γ, I), con $I = [0,2\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \left(\sin^3(t), \, \cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - 1 \right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto $P = \left(-\frac{3}{8}\sqrt{3}, \, -1\right)$;

Cerchiamo innanzitutto un parametro $t_0 \in [0,2\pi]$ per cui $\gamma(t_0) = P$. Scriviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \sin^3(t_0) = -\frac{3}{8}\sqrt{3} \\ \cos^2(t_0) + \frac{1}{2}\cos(t_0) - 1 = -1 \end{cases}$$

da cui si trova $t_0 = \frac{4}{3}\pi$. Il vettore velocità nel punto P è quindi dato da

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} 3\sin^2(t_0)\cos(t_0) \\ -2\sin(t_0)\cos(t_0) - \frac{1}{2}\sin(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

e, non essendo nullo, rappresenta la base dello spazio tangente alla curva. Quindi l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto P è

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x + \frac{3}{8}\sqrt{3} \right) - \frac{9}{8}(y+1) = 0$$

ii) calcolare il lavoro del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x-y}{x^2+y^2} \\ \\ \frac{x+2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

lungo la curva (γ, I). (*Suggerimento: potrebbe essere utile studiare le proprietà del campo di vettori.*)

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Si trova che

$$\text{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2x(x+2y)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-x^2-y^2-2y(2x-y)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Quindi il campo è irrotazionale. Per vedere se è conservativo studiamo innanzitutto il suo dominio Ω. Si trova che

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

che non è semplicemente connesso. Dobbiamo quindi studiare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una curva chiusa intorno all'origine. Per semplificare i calcoli scegliamo la curva

$$\chi(t) = \Big(\cos t,\ \sin t\Big) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si ottiene dalla formula

$$L(\mathbf{F},\chi) = \int_0^{2\pi} < \mathbf{F}(\chi(t)), \chi'(t) > \, dt = \int_0^{2\pi} \Big[-(2\cos t - \sin t)\sin t + (\cos t + 2\sin t)\cos t \Big] \, dt = 2\pi$$

Quindi il campo non è conservativo.

Studiamo adesso la curva (γ, I). Notiamo innanzitutto che la curva è chiusa, ossia $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, ed è di classe C^1. Disegniamo infine il sostegno della curva, vedi figura 13, e deduciamo che la curva è semplice, è percorsa in senso orario e l'origine è contenuta nella parte interna alla curva (basta identificare alcuni punti del sostegno e unirli in maniera approssimativa). Non possiamo allora

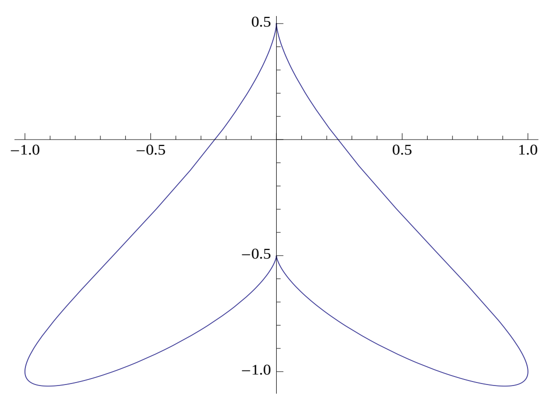

Figure 13: Il sostegno della curva (γ, I)

applicare il Teorema del Rotore, ma possiamo dedurre dalla teoria sui campi di vettori irrotazionali che

$$L(\mathbf{F},\gamma) = -L(\mathbf{F},\chi) = -2\pi$$

dove il segno dipende dalla differenza tra le orientazioni delle due curve.

iii) calcolare il lavoro del campo di vettori del punto ii) lungo la curva definita su $I = [0, 2\pi]$ *dalla parametrizzazione*

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \left(\sin^3(t), \, \cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t) \right)$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile studiare le proprietà del campo di vettori.*)

Studiamo adesso la curva $(\tilde{\gamma}, I)$, che ha le stesse proprietà di (γ, I). L'unica differenza è che adesso il sostegno è traslato nella direzione y. Se infatti disegniamo il sostegno di $(\tilde{\gamma}, I)$ troviamo la figura 14, e quindi la curva è semplice, è percorsa in senso orario e l'origine stavolta non è contenuta nella parte interna U alla curva (basta identificare alcuni punti del sostegno e unirli in maniera approssimativa). Possiamo allora applicare il Teorema del Rotore e dedurre che

$$L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = - \iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x, y) \, dxdy = 0$$

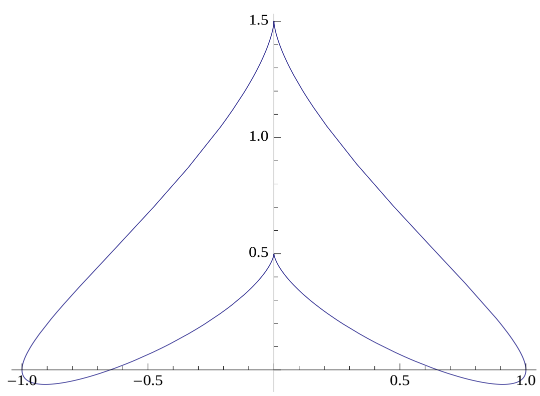

Figure 14: Il sostegno della curva $(\tilde{\gamma}, I)$