Calcolo delle Probabilità e Statistica
Corso di Laurea in Informatica
Compito del 14-02-2021

Esercizio 1. (8 punti)

Consideriamo 5 componenti di un'apparecchiatura elettronica, e supponiamo che ogni componente sia guasto con probabilità 0.3 indipendentemente dagli altri. L'apparecchiatura funziona se almeno 2 tra i 5 componenti non sono guasti.

a) Qual è la probabilità che l'apparecchiatura funzioni?

b) Se l'apparecchiatura funziona, qual è la probabilità che la prima delle componenti sia guasta?

Esercizio 2. (12 punti)

Si consideri una variabile aleatoria X avente funzione di ripartizione così definita:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ a\,x + b\,x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

(dove a e b sono due costanti reali, non necessariamente positive).

a) Quali relazioni tra le costanti a e b garantiscono che la funzione sopra scritta sia la funzione di ripartizione di una variabile con densità?

b) È possibile determinare le costanti a e b in modo tale che si abbia $E\big[X\big] = 0.5$? E in modo che si abbia $E\big[X\big] = -1$?

c) Calcolare la densità della variabile $Y = \log(X)$.

Esercizio 3. (10 punti)

Il punto di fusione dello stagno allo stato puro è di 231.06 gradi Celsius. Sono stati prelevati 81 campioni di stagno proveniente da una miniera (e quindi contenente delle impurità) ed è stata fatta un'accurata misurazione delle loro temperature di fusione ottenendo una temperatura media di 235.44 gradi con una deviazione standard di 3.6.

a) Il tecnico che ha condotto queste misurazioni ha calcolato che la precisione della stima ottenuta dalle misurazioni è 0.82. Con quale livello di fiducia ha (approssimativamente) calcolato questa precisione?

b) Commentando i risultati, il tecnico afferma che in realtà la varianza di queste misurazioni non supera 10. Indicare quale test si deve predisporre per verificare questa affermazione e calcolare (approssimativamente) il relativo *p-value*.

Esercizio 3 per programma precedente. (10 punti)

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in [0, 1]$.

(i) Dire per quali valori di λ, partendo dallo stato 1 al tempo 0, è più probabile trovarsi al tempo 2 nello stato 2 rispetto allo stato 3.

(ii) Calcolare in funzione di λ, la probabilità di trovarsi nello stato 2 al tempo 3 partendo dallo stato 1 al tempo 0.

(iii) Determinare la probabilità invariante in funzione di $\lambda \in [0, 1]$. Esiste un valore di $\lambda \in [0, 1]$ per cui la probabilità invariante sia $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$?