Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 14-02-2019

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \log\Big(1+xy\Big)$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su Ω dato dal triangolo di vertici $S_1 = (1,1)$, $S_2 = (-\frac{1}{2},1)$ e $S_3 = (-\frac{1}{2},-2)$.

Esercizio 2. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \Big(\cos(\pi t)\,,\, t^3\Big)$$

i) dire in quali punti P esiste la retta tangente al sostegno della curva;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,,\, (x-1)^2+y^2 \le 1\,,\, y \ge 0\big\}$.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log\Big(1+xy\Big)$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

Il dominio naturale della funzione f è l'insieme $X = \{1+xy>0\}$ e la funzione da studiare nel limite è definita su $\tilde{X} = X \setminus \{(0,0)\}$. Poiché l'origine è un punto di accumulazione di $\tilde{X}$, ha senso studiare il limite.

Il limite è della forma indeterminata $\frac{0}{0}$, e usando il comportamento asintotico $\log(1+t)\tilde{t}$ per $t\to 0$, otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

Iniziamo a studiare cosa succed lungo le rette della forma $y=\lambda x$ con $\lambda\in\mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^{\frac{4}{3}}\,(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}} = 0\,.$$

Dunque se il limite esiste, è uguale a 0. Usiamo il Teorema del Confronto, e cerchiamo una buona maggiorazione. Abbiamo

$$0 \le \left|\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\right| = \frac{|x|\,|y|}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \le \frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$$

e chiaramente $(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}} \to 0$ se $(x,y)\to 0$. Quindi il limite richiesto esiste ed è uguale a 0.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su Ω dato dal triangolo di vertici $S_1=(1,1)$, $S_2=(-\frac{1}{2},1)$ e $S_3=(-\frac{1}{2},-2)$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

L'insieme Ω è interamente contenuto nella parte interna del dominio naturale $X=\{1+xy>0\}$ della funzione f. La funzione f è la composizione di un polinomio, $h(x,y)=1+xy$, e della funzione $g(t)=\log t$, e dunque è differenziabile in tutto Ω.

Passiamo allo studio dei punti critici liberi interni a Ω. Calcoliamo il gradiente di f

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{1+xy} \\ \\ \frac{x}{1+xy} \end{pmatrix}$$

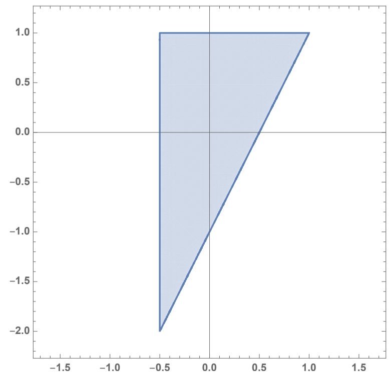

Figure 1: L'insieme Ω.

da cui si ricava che l'unico punto critico libero di f è $C = (0,0)$, che è interno a Ω e va dunque considerato.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \text{segmento}\,\overline{S_1S_2} = \left\{ y = 1\,,\ -\frac{1}{2} \le x \le 1 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \text{segmento}\,\overline{S_2S_3} = \left\{ x = -\frac{1}{2}\,,\ -2 \le y \le 1 \right\}$$

$$\Gamma_3 = \text{segmento}\,\overline{S_1S_3} = \left\{ y = 2x - 1\,,\ -\frac{1}{2} \le x \le 1 \right\}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\,1)\,, \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}\,,\,1 \right] ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log(1+t)\,, \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}\,,\,1 \right] .$$

Risulta $g_1'(t) = \frac{1}{1+t}$, dunque non ci sono punti critici.

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(-\frac{1}{2}\,,\,t \right), \qquad t \in [-2, 1] ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log\left(1 - \frac{t}{2} \right) , \qquad t \in [-2, 1] .$$

Risulta $g_2'(t) = -\frac{1}{2-t}$, dunque non ci sono punti critici.

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = tS_1 + (1-t)S_3 = \left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\,,\, 3t-2\right)\,, \qquad t \in [0,1]\;,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = \log\left(2 - \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}t^2\right)\;, \qquad t \in [0,1]\;.$$

Risulta $g_1'(t) = -\frac{9t-\frac{9}{2}}{2-\frac{9}{2}t+\frac{9}{2}t^2}$, dunque l'unico punto critico è $t_0 = \frac{1}{2} \in (0,1)$, da cui otteniamo il punto critico vincolato

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C) = 0 \quad f(S_1) = f(S_3) = \log 2\,, \quad f(S_2) = \log\frac{1}{2}\,, \quad f(Q) = \log\frac{7}{8}\,.$$

Dunque il massimo di f è $\log 2$ e il minimo è $\log\frac{1}{2}$.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\cos(\pi t)\,,\, t^3\right)$$

i) dire in quali punti P esiste la retta tangente al sostegno della curva;

La curva (γ, I) ha parametrizzazione $\gamma(t) \in C^1(I)$, quindi possiamo calcolare il vettore tangente

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\pi\,\sin(\pi t) \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

Nell'intervallo $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ troviamo che $\gamma'(t) = 0$ se e solo se $t = 0$. Quindi nei punti $P = \gamma(t)$ con $t \neq 0$ esiste sicuramente la retta tangente al sostegno della curva.

Poiché il non annullarsi del vettore tangente è una condizione solo sufficiente per l'esistenza della retta tangente al sostegno di una curva, non possiamo ancora concludere circa l'esistenza o meno della retta tangente al sostegno nel punto $Q = \gamma(0) = (1,0)$. Osserviamo però che scrivendo l'equazione cartesiana della curva

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\pi t) \\ y(t) = t^3 \end{cases}$$

possiamo ricavare che il sostegno della curva è l'insieme

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = \cos(\pi\, y^{\frac{1}{3}})\,,\, -\frac{1}{8} \leq y \leq \frac{1}{8}\right\}\,.$$

In particolare Γ è parte del grafico della funzione $g(y) = \cos(\pi\, y^{\frac{1}{3}})$, e quindi l'esistenza della retta tangente a Γ in Q è equivalente alla derivabilità della funzione g per $y = 0$. È facile verificare che g non è derivabile in $y = 0$, e quindi non esiste la retta tangente a Γ in Q.

Per convincervi graficamente della cosa, possiamo anche guardare il sostegno Γ, rappresentato in figura 2.

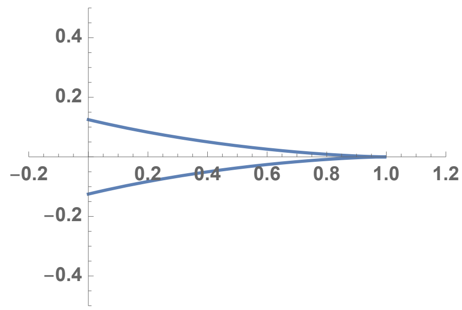

Figure 2: Il sostegno Γ.

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x \end{pmatrix}$$

Il dominio naturale del campo $\mathbf{F}$ è $\mathbb{R}^2$, e il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale visto che

$$\text{rot}\, \mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 1 - 1 = 0$$

Il campo $\mathbf{F}$ è quindi conservativo, e possiamo verificare che $f(x,y) = x^2 + xy$ è un potenziale. Ne segue che

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = f\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) - f\left(\gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(0, \frac{1}{8}\right) - f\left(0, -\frac{1}{8}\right) = 0\,.$$

Esercizio 3. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\,,\ y \geq 0\big\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 3.

È preferibile svolgere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho, \theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

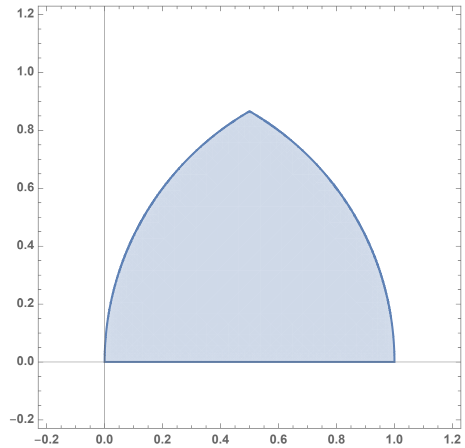

Figure 3: L'insieme Ω.

Ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \iint_S \rho^4 \cos^3\theta \sin\theta \, d\rho\, d\theta \, .$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{ (\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0, 2\pi] \, : \, \rho^2 \le 1 \, , \, (\rho\cos\theta - 1)^2 + \rho^2 \sin^2\theta \le 1 \, , \, \rho \sin\theta \ge 0 \right\}$$

Dalla prima e dalla terza condizione otteniamo

$$\theta \in [0,\pi] \quad \text{e} \quad 0 \le \rho \le 1 \, .$$

La seconda condizione si riscrive come

$$\rho^2 - 2\rho\cos\theta \le 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho \le 2\cos\theta$$

da cui ricaviamo anche che deve essere $\cos\theta > 0$. L'insieme S è quindi quello rappresentato in figura 4 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo considerare la soluzione in $[0, \frac{\pi}{2}]$ di

$$2\cos\theta = 1$$

che è $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$. Possiamo dunque scrivere S come

$$S = \left\{ (\rho,\theta) \, : \, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \, , \, 0 \le \rho \le 1 \right\} \quad \bigcup \quad \left\{ (\rho,\theta) \, : \, \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \, , \, 0 \le \rho \le 2\cos\theta \right\} \, .$$

Otteniamo quindi

$$\iint_\Omega \frac{x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \iint_S \rho^4 \cos^3\theta \sin\theta \, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^1 \rho^4 \cos^3\theta \sin\theta \, d\rho \right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho^4 \cos^3\theta \sin\theta \, d\rho \right) d\theta =$$

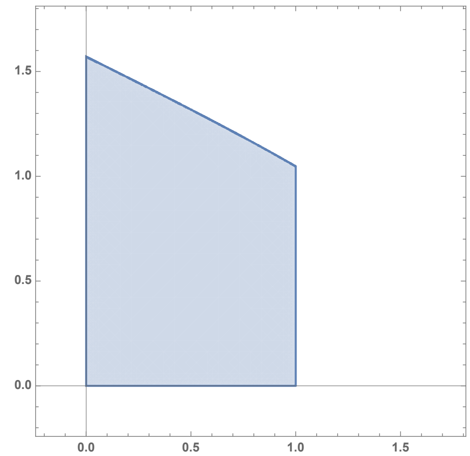

Figure 4: L'insieme S.

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{5}\cos^3\theta\,\sin\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5}\cos^8\theta\,\sin\theta\,d\theta = \left(-\frac{1}{20}\cos^4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \left(-\frac{32}{45}\cos^9\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{20}\,\frac{1}{16} + \frac{1}{20} + \frac{32}{45}\,\frac{1}{512} = \frac{3}{64} + \frac{1}{720} = \frac{139}{2880}\,.$$