Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 13-09-2019

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2} - 1$$

i) trovare tutti i punti critici, e dire se la funzione ammette massimo e minimo assoluti;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, 2x^2 + y^2 \leq 1 \right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-1, 1]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [-1\,,\,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(t^2\,,\, 1 + t - \sin t \right)$$

i) dire in quali punti P esiste la retta tangente al sostegno della curva;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + (y-1)^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2x(y-1) - \sin(y-1) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + \sin z = z\,,\, z \leq 2\pi \right\}$$

i) scrivere una parametrizzazione globale di Σ;

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + \sin z \leq z\,,\, z \leq 2\pi\,,\, x^2 + y^2 \leq \pi \right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2} - 1$$

i) trovare tutti i punti critici, e dire se la funzione ammette massimo e minimo assoluti;

La funzione $f(x,y)$ si può scrivere come composizione delle funzioni $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e $h(t) = e^t - t - 1$, quindi $f(x,y) = h(g(x,y))$. La funzione h ha come dominio $\mathbb{R}$ ed è differenziabile in tutti i punti del dominio, mentre la funzione g ha come dominio $\mathbb{R}^2$ ed è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Otteniamo quindi che il dominio naturale di f è $X = \mathbb{R}^2$, e certamente f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. I punti critici di f vanno cercati tra i punti in cui la funzione è differenziabile, quindi è importante stabilire innanzitutto se f è differenziabile anche in $(0,0)$ oppure no.

Per farlo, studiamo innanzitutto l'esistenza delle derivate parziali in $(0,0)$. Usando lo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale in $t_0 = 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{|t|} - |t| - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}t^2 + o(t^2)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{|t|} - |t| - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}t^2 + o(t^2)}{t} = 0$$

Esistendo le derivate parziali, dobbiamo studiare se il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

esiste ed è uguale a 0. Sostituendo i valori trovati abbiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{e^r - r - 1}{r} = 0$$

ponendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Abbiamo quindi mostrato che la funzione f è differenziabile anche in $(0,0)$, e dunque è differenziabile su $\mathbb{R}^2$.

Passiamo allo studio dei punti critici. Dobbiamo trovare i punti di $\mathbb{R}^2$ in cui si annulla il gradiente di f. Abbiamo

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right) \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right) \end{pmatrix} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0), \text{ e} \quad \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi i punti critici di f sono

$$C = (0,0)$$

ed eventuali soluzioni di
$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right)=0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right)=0 \\ (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$
Non essendoci soluzioni del sistema, si trova che C è l'unico punto critico di f.

Si mostra facilmente che la funzione non può avere massimo assoluto. Infatti, restringendosi all'asse delle x si trova

$$\lim_{(x,y)\to\infty\,,\,y=0} f(x,y)=\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{|x|}-|x|-1\right)=+\infty$$

e quindi la funzione non è limitata superiormente.

Osserviamo poi che la funzione potrebbe assumere il suo minimo assoluto solo in un punto critico, essendo la funzione differenziabile su tutto il suo dominio naturale. Dunque se il minimo assoluto esiste corrisponde necessariamente con $C=(0,0)$. Poiché $e^r-r-1\geq 0$ per ogni $r\in[0,+\infty)$ (come si può verificare ad esempio studiando la funzione), troviamo che

$$f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}-1\geq 0=f(0,0)\qquad\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Quindi f ammette minimo assoluto uguale a 0.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x\geq 0\,,\,y\geq 0\,,\,2x^2+y^2\leq 1\right\}\,.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

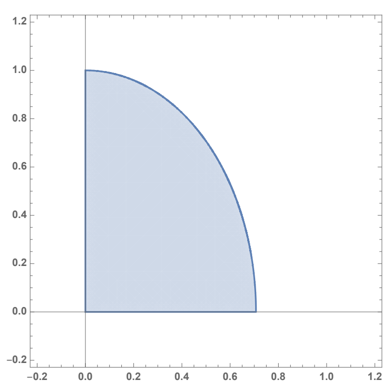

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

Abbiamo visto che la funzione f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$, e l'unico punto critico libero trovato non è interno a Ω, dunque non lo consideriamo.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = (0\,,\,0)\ , \qquad S_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,0\right) \quad \text{e} \quad S_3 = (0\,,\,1)\ .$$

Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \left\{y = 0\,,\, 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\Gamma_2 = \{x = 0\,,\, 0 \le y \le 1\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{2x^2 + y^2 = 1\,,\, 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\,0)\,, \qquad t \in \left[0\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = e^{|t|} - |t| - 1, \qquad t \in \left[0\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\ .$$

Si trova $g_1'(t) = e^t - 1$, che non si annulla in $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Dunque non troviamo punti critici vincolati in Γ_1.

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (0\,,\,t)\,, \qquad t \in [0\,,\,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = e^{|t|} - |t| - 1, \qquad t \in [0\,,\,1]\ .$$

Si trova $g_2'(t) = e^t - 1$, che non si annulla in $(0, 1)$. Dunque non troviamo punti critici vincolati in Γ_2.

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = \left(t\,,\,\sqrt{1 - 2t^2}\right)\,, \qquad t \in \left[0\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = e^{\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1 - t^2} - 1, \qquad t \in \left[0\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\ .$$

Si trova $g_3'(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\left(1 - e^{\sqrt{1-t^2}}\right)$, che non si annulla in $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Dunque non troviamo punti critici vincolati in Γ_3.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = 0\,, \quad f(S_2) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\,, \quad f(S_3) = e - 2\,.$$

Poiché $e^r - 1 - 1$ è una funzione crescente per $r \in (0, +\infty)$, il massimo di f è $e - 2$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Data la curva* (γ, I)*, con* $I = [-1, 1]$ *e parametrizzazione*

$$\gamma : [-1\,,\,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t^2\,,\,1 + t - \sin t\Big)$$

i) dire in quali punti P *esiste la retta tangente al sostegno della curva;*

La curva (γ, I) ha parametrizzazione $\gamma(t) \in C^1(I)$, quindi possiamo calcolare il vettore tangente

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

Nell'intervallo $I = [-1, 1]$ troviamo che $\gamma'(t) = 0$ se e solo se $t = 0$. Quindi nei punti $P = \gamma(t)$ con $t \neq 0$ esiste sicuramente la retta tangente al sostegno della curva.

Poiché il non annullarsi del vettore tangente è una condizione solo sufficiente per l'esistenza della retta tangente al sostegno di una curva, non possiamo ancora concludere circa l'esistenza o meno della retta tangente al sostegno nel punto $Q = \gamma(0) = (0, 1)$. Osserviamo però che scrivendo l'equazione cartesiana della curva

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(y) = 1 + t - \sin t \end{cases}$$

possiamo ricavare che il sostegno della curva è l'insieme

$$\Gamma = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,:\,y = 1 + \sqrt{x} - \sin\sqrt{x}\,,\,0 \le x \le 1\Big\} \bigcup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,:\,y = 1 - (\sqrt{x} - \sin\sqrt{x})\,,\,0 \le x \le 1\Big\}\,.$$

In particolare Γ è unione di due grafici, quello della funzione $g(x) = 1 + \sqrt{x} - \sin\sqrt{x}$ e della funzione $h(x) = 1 - (\sqrt{x} - \sin\sqrt{x})$, per $x \in [0, 1]$. Inoltre il punto di unione dei due grafici è proprio $Q = (0, 1)$. Osservando che la funzione $g(x) = 1 + \sqrt{x} - \sin\sqrt{x}$ verifica $g'(0) = 0$, e lo stesso vale per $h(x)$, deduciamo quindi che il sostegno Γ ha in Q una cuspide, e quindi non esiste la retta tangente a Γ in Q.

Per convincervi graficamente della cosa, possiamo anche guardare il sostegno Γ, rappresentato in figura 2.

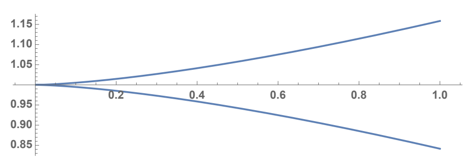

Figure 2: Il sostegno Γ.

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) *del campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + (y-1)^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2x(y-1) - \sin(y-1) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

Il dominio naturale del campo $\mathbf{F}$ è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale visto che

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \Big(2(y-1) - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\Big) - \Big(2(y-1) - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\Big) = 0$$

Poiché il sostegno della curva è interamente contenuto nel sottoinsieme $\Omega = \{y > 0\}$ del dominio del campo, e Ω è semplicemente connesso, possiamo restringere $\mathbf{F}$ a Ω, e usare il fatto che in Ω il campo risulta essere conservativo per via del Lemma di Poincaré.

Possiamo quindi calcolare il lavoro in due modi, cercando un potenziale del campo su Ω oppure calcolando il lavoro lungo una curva che abbia lo stesso punto iniziale e finale di (γ, I).

Scegliamo di cercare un potenziale del campo su Ω. Dobbiamo trovare una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile che sia soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + (y-1)^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x(y-1) - \sin(y-1) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \qquad \forall\, (x,y) \in \Omega$$

Dalla prima equazione ricaviamo che

$$f(x,y) = \int \Big(2x + (y-1)^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\, dx + c(y) = x^2 + x(y-1)^2 + \sqrt{x^2+y^2} + c(y)$$

per una opportuna funzione $c(y)$. Sostituendo nella seconda equazione si trova

$$2x(y-1) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + c'(y) = 2x(y-1) - \sin(y-1) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

da cui

$$c'(y) = -\sin(y-1)$$

e quindi possiamo scegliere $c(y) = \cos(y-1)$. Ricaviamo quindi che un potenziale del campo è la funzione

$$f(x,y) = x^2 + x(y-1)^2 + \sqrt{x^2+y^2} + \cos(y-1)$$

Osserviamo inoltre che questa funzione è un potenziale del campo su tutto il dominio naturale del campo, che quindi è globalmente conservativo.

In conclusione troviamo quindi che

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = f(\gamma(1)) - g(\gamma(-1)) = f(1, 2-\sin 1) - f(1, \sin 1) = \sqrt{1 + (2-\sin 1)^2} - \sqrt{1 + \sin^2 1}\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + \sin z = z\,,\ z \leq 2\pi\big\}$$

i) scrivere una parametrizzazione globale di Σ;

L'insieme Σ si può interpretare come superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z il grafico della funzione $y = g(z)$ data da $g(z) = \sqrt{z - \sin z}$. Il dominio naturale della funzione g è l'insieme $\{z - \sin z \geq 0\} = \{z \geq 0\}$, e quindi per Σ si considera $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.

Possiamo quindi scrivere la parametrizzazione globale

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 , \qquad \sigma(t, \theta) = \Big(\sqrt{t - \sin t} \cos\theta \, , \, \sqrt{t - \sin t} \sin\theta \, , \, t \Big) \, .$$

con

$$D = \{(t, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \, : \, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + \sin z \leq z \, , \, z \leq 2\pi \, , \, x^2 + y^2 \leq \pi\big\}$$

L'insieme V, rappresentato in figura 3, e si può riscrivere come

$$V = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 \leq \min\{z - \sin z, \pi\} \, , \, z \leq 2\pi\big\}$$

Ci interessa quindi studiare quando $g(z) = \sqrt{z - \sin z} \geq \sqrt{\pi}$. Essendo $z - \sin z$ funzione crescente, si ha che $g(z) \geq \sqrt{\pi}$ per $z \geq \pi$. Quindi possiamo scrivere $V = V_1 \cup V_2$ con

$$V_1 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 \leq z - \sin z \, , \, 0 \leq z \leq \pi\big\}$$

$$V_2 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 \leq \pi \, , \, \pi \leq z \leq 2\pi\big\}$$

Il volume di V si può quindi calcolare utilizzando la formula di integrazione per strati come

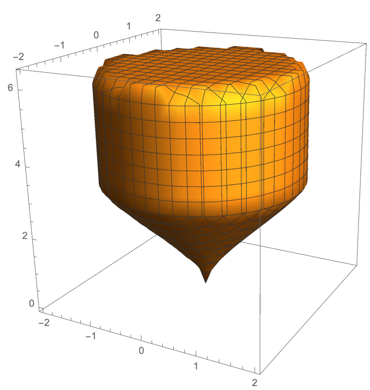

Figure 3: L'insieme V.

$$\mathrm{vol}(V) = \mathrm{vol}(V_1) + \mathrm{vol}(V_2) = \iiint_{V_1} 1 \, dxdydz + \iiint_{V_2} 1 \, dxdydz =$$

$$= \int_0^{\pi} \Big(\int_{x^2+y^2 \leq z - \sin z} 1 \, dxdy \Big) \, dz + \int_{\pi}^{2\pi} \Big(\int_{x^2+y^2 \leq \pi} 1 \, dxdy \Big) \, dz =$$

$$= \int_0^{\pi} \pi \Big(z - \sin z \Big) \, dz + \int_{\pi}^{2\pi} \pi^2 \, dz = \frac{3}{2} \pi^3 - 2\pi \, .$$