Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 13-01-2015

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = 3x^2 - x^2y + y + 1$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella. Trovare sup e inf di f;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2\,,\, 0 \le y \le 2\,,\, x+y \le \frac{5}{2} \right\}\,.$$

Esercizio 2. (11 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(2 + \cos(t)\,,\, \sin(t^2 - 2\pi t) \Big)$$

i) dire se la curva è regolare;

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (3\,,\,0)$;

iii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (11 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 = -\frac{1}{2} + \sin y\,,\, 0 \le y \le \pi \right\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 \le -\frac{1}{2} + \sin y\,,\, 0 \le y \le \pi \right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x, y) = 3x^2 - x^2y + y + 1$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella. Trovare sup e inf di f.

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x, y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 6x - 2xy = 0 \\ -x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $x = \pm 1$, e sostituendo nella prima otteniamo che i punti critici di f sono

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Per caratterizzarli andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione anche di classe C^2 su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6 - 2y & -2x \\ -2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora la matrice Hessiana in P_1:

$$Hf(1, 3) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

e si ha $\det Hf(0, 0) = -4 < 0$. Dunque P_1 è un punto di sella.
Calcoliamo ora la matrice Hessiana in P_2:

$$Hf(-1, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

e si ha $\det Hf(0, 0) = -4 < 0$. Dunque anche P_2 è un punto di sella.

Per trovare sup e inf di f, iniziamo considerando la restrizione della funzione su uno degli assi cartesiani, e guardiamo come si comporta a $\pm\infty$. Se restringiamo f all'insieme $\{x = 0\}$ troviamo

$$f(0, y) = y + 1,$$

e quindi

$$\lim_{y \to \pm\infty} f(0, y) = \pm\infty.$$

Ne segue che $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \le x \le 2 \, , \, 0 \le y \le 2 \, , \, x+y \le \frac{5}{2} \right\} .$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 1.

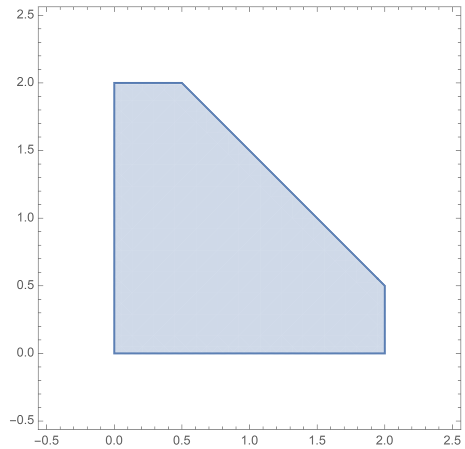

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non derivabilità, e i punti critici sono stati trovati al punto i). Entrambi però non sono interni all'insieme $\bar{\Omega}$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad S_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad S_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Parametrizziamo ora i cinque segmenti del bordo. Troviamo

$$\gamma_1(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{3}{2}t \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_4(t) = (1-t) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_5(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-2t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 12t^2 + 1\,, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = -\frac{3}{2}t + 13\,, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = -\frac{27}{8}\,t^3 + \frac{117}{8}\,t^2 - \frac{39}{2}\,t + \frac{23}{2}\,, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_4(t) = f(\gamma_4(t)) = \frac{1}{4}\,t^2 - \frac{1}{2}\,t + \frac{13}{4}\,, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_5(t) = f(\gamma_5(t)) = 3 - 2t\,, \qquad t \in [0,1]$$

Tutte le funzioni sono sempre derivabili e gli estremi dei loro domini corrispondono agli spigoli. Dunque ci rimane di trovare i punti critici delle tre funzioni.

Le funzioni g_2 e g_5 sono lineari, e quindi assumono massimo e minimo agli estremi degli intervalli di definizione, e quindi troviamo gli spigoli come loro punti di massimo e minimo. Lo stesso succede per g_1, come si vede scrivendo $g_1'(t) = 24t \geq 0$ per $t \in [0,1]$.

Rimangono da studiare g_3 e g_4. Abbiamo $g_3'(t) = -\frac{81}{8}\,t^2 + \frac{117}{4}\,t - \frac{39}{2}$, che nell'intervallo $[0,1]$ non si annulla mai. Quindi anche per g_3 troviamo solo gli spigoli. Infine $g_4'(t) = \frac{1}{2}(t-1) \leq 0$ su $[0,1]$, e quindi anche per g_5 troviamo solo gli spigoli.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque solo i valori di f sugli spigoli, ossia

$$f(S_1) = 1\,, \quad f(S_2) = 13\,, \quad f(S_3) = \frac{23}{2}\,, \quad f(S_4) = \frac{13}{4}\,, \quad f(S_5) = 3\,.$$

Per cui il massimo di f è 13 e il minimo è 1.

(Una parametrizzazione alternativa a γ_3 che rende i conti più semplici si ottiene scrivendo

$$\tilde{\gamma}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{5}{2} - t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Da cui

$$\tilde{g}_3(t) = f(\tilde{\gamma}_3(t)) = t^3 + \frac{1}{2}\,t^2 - t + \frac{7}{2}\,, \qquad t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

e $\tilde{g}_3'(t) = 3t^2 + t - 1$ che si annulla in $t_- = -\frac{1}{6}(\sqrt{13}+1) < 0$ e $t_+ = \frac{1}{6}(\sqrt{13}-1) < \frac{1}{2}$. Quindi si ritrova che i punti di massimo e minimo sono gli estremi dell'intervallo.)

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(2 + \cos t\,,\, \sin(t^2 - 2\pi t)\Big)$$

i) dire se la curva è regolare;

Bisogna determinare se ci sono punti interni all'intervallo I in cui si annulla il vettore velocità $\gamma'(t)$. Essendo

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ (2t - 2\pi)\cos(t^2 - 2\pi t) \end{pmatrix},$$

il sistema

$$\begin{cases} -\sin t = 0 \\ (2t - 2\pi)\cos(t^2 - 2\pi t) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione $t_0 = \pi \in (0, 2\pi)$. Quindi la curva non è regolare.

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (3\,,\,0)$;

Innanzitutto troviamo $t_0 \in I$ tale che $\gamma(t_0) = P$ risolvendo

$$\begin{cases} 2 + \cos t_0 = 3 \\ \sin(t_0^2 - 2\pi t_0) = 0 \end{cases}$$

Si trova $t_0 = 0$ o $t_0 = 2\pi$, essendo infatti la curva chiusa. Essendo allora la curva chiusa, e la sua parametrizzazione ben definita anche per $t < 0$, posso procedere in maniera standard scegliendo $t_0 = 0$ e considerarlo interno all'intervallo di definizione. La retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto P è dunque generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi \end{pmatrix}$$

e quindi un vettore ortogonale alla retta è il vettore

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto P è quindi

$$1 \cdot (x - 3) + 0 \cdot (y - 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3\,.$$

iii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$ (incontrato già a lezione). Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

A questo punto poiché la curva è chiusa, prima di domandarci se il campo è conservativo, vediamo se possiamo applicare il Teorema del Rotore. L'ipotesi fondamentale che dobbiamo verificare è che l'insieme U racchiuso dalla curva sia tutto contenuto nel dominio del campo, ossia che $(0,0) \notin U$. Di questo ci convinciamo facilmente provando ad abbozzare un disegno del sostegno di (γ, I), o anche semplicemente notando che i valori della componente x del sostegno di (γ, I) sono compresi tra 1 e 3.

Possiamo quindi applicare il Teorema del Rotore e otteniamo

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \iint_U \operatorname{rot}(\mathbf{F})(x,y)\, dxdy = \iint_U 0\, dxdy = 0\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 = -\frac{1}{2} + \sin y\,,\; 0 \le y \le \pi \right\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

La superficie Σ è una superficie di rotazione con asse dato dall'asse y, generata dalla rotazione della funzione $g(y) = \sqrt{\sin y - \frac{1}{2}}$. Per capire quindi come sia fatta Σ dobbiamo innanzitutto determinare il dominio I della funzione g. Si trova $I = [\frac{1}{6}\pi\,,\, \frac{5}{6}\pi]$. Un disegno approssimativo di Σ è quello dato nella figura 2.

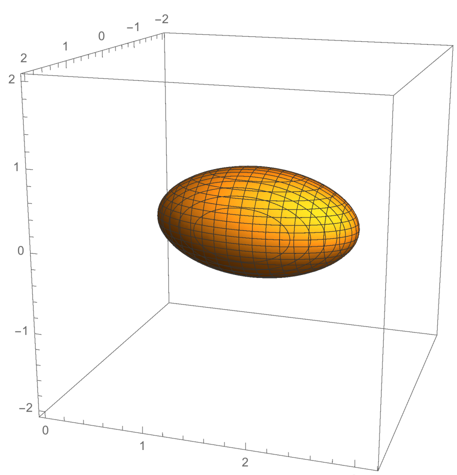

Figure 2: La superficie Σ.

Una possibile parametrizzazione globale di Σ è allora

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(\theta, t) = \left(\sqrt{\sin t - \frac{1}{2}}\, \cos\theta\,,\, t\,,\, \sqrt{\sin t - \frac{1}{2}}\, \sin\theta \right)$$

con

$$D = \left\{ (\theta, t) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le \theta \le 2\pi\,,\, \frac{1}{6}\pi \le t \le \frac{5}{6}\pi \right\}\,.$$

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + z^2 \leq -\frac{1}{2} + \sin y \, , \, 0 \leq y \leq \pi \right\}$$

Si tratta di un solido di rotazione della forma

$$\big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, a \leq y \leq b \, , \, x^2 + z^2 \leq g^2(y) \big\}$$

dove $g(z) = \sqrt{\sin y - \frac{1}{2}}$, e come abbiamo visto prima, $a = \frac{\pi}{6}$ e $b = \frac{5}{6}\pi$. Possiamo quindi applicare la formula

$$\mathrm{Volume}(V) = \int_a^b \pi g^2(y) \, dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \pi \Big(\sin y - \frac{1}{2} \Big) \, dy = \pi \Big(-\cos y - \frac{1}{2} y \Big) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} = \pi \Big(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \Big) \, .$$