Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 12-06-2019

Esercizio 1. (12 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu\, x(y-1) \\ \dot{y} = (x-1)\, y + \mu\, x \end{cases}$$

con il parametro $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Disegnare un possibile ritratto di fase del sistema al variare di μ.

Esercizio 2. (8 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 4x^3 + 3x^5 - x^7 \end{cases}$$

(i) mostrare che si tratta di un sistema meccanico di tipo Hamiltoniano, e trovare la Lagrangiana;
(ii) studiare la stabilità dei punti critici;
(iii) dire se esistono orbite illimitate.

Esercizio 3. (10 punti) Data la funzione $f_a : [0,1] \to [0,1]$ definita da

$$f_a(x) = x^3 - a\, x(1-x)$$

con $a \in [-2, 0]$,

(i) trovare i punti fissi del sistema al variare del parametro a, e studiarne la stabilità;

(ii) discutere l'esistenza di orbite periodiche.

Svolgimento

Esercizio 1. *Si consideri il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu\, x(y-1) \\ \dot{y} = (x-1)\, y + \mu\, x \end{cases}$$

con il parametro $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Disegnare un possibile ritratto di fase del sistema al variare di μ.

Cerchiamo innanzitutto i punti fissi del sistema al variare di $\mu \neq 0$. Si tratta delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -\mu\, x(y-1) = 0 \\ (x-1)\, y + \mu\, x = 0 \end{cases}$$

Si ottengono due casi:

$\mu \neq -1$ - ci sono due punti fissi $Q_1 = (0,0)$ e $Q_2 = (\frac{1}{1+\mu}, 1)$;

$\mu = -1$ - c'è un solo punto fisso $Q_1 = (0,0)$.

Consideriamo prima il caso $\mu \neq -1$. La matrice Jacobiana del campo di vettori è data da

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} -\mu\,(y-1) & -\mu\, x \\ y+\mu & x-1 \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$JF(Q_1) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \mu & -1 \end{pmatrix}$$

con $\det JF(Q_1) = -\mu$ e traccia $JF(Q_1) = \mu - 1$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = \mu$ con autovettore $v_1 = (1,0)$, e $\lambda_2 = -1$ con autovettore $v_2 = (0,1)$.

$$JF(Q_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mu}{1+\mu} \\ 1+\mu & -\frac{\mu}{1+\mu} \end{pmatrix}$$

con $\det JF(Q_2) = \mu$ e traccia $JF(Q_2) = -\frac{\mu}{1+\mu}$. Possiamo determinare che gli autovalori sono complessi con parte immaginaria non nulla e parte reale negativa per $\mu > 0$, e sono reali e discordi per $\mu < 0$.

Quindi, studiando gli autovalori delle matrici troviamo le seguenti situazioni:

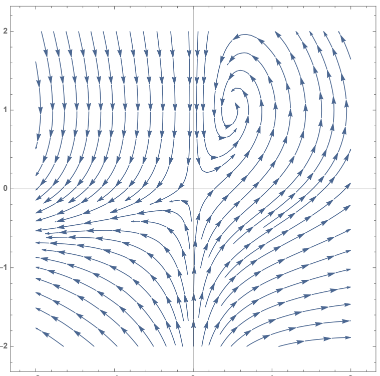
	Q_1	Q_2
$\mu > 0$	sella	fuoco attrattivo
$\mu \in (-1,0)$	nodo attrattivo	sella
$\mu < -1$	nodo attrattivo	sella

Per disegnare il ritratto di fase è utile studiare il segno del campo vettoriale. Osserviamo inoltre che per ogni μ, la retta $\{x = 0\}$ è un insieme invariante.

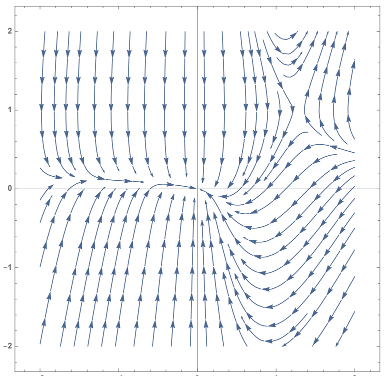
Per quanto riguarda l'esistenza di orbite periodiche, possiamo usare l'indice di Poincaré per osservare innanzitutto che un'orbita periodica deve circondare necessariamente Q_1 per $\mu < 0$ o

Q_2 per $\mu > 0$. Poiché $\{x = 0\}$ è un insieme invariante, non può esistere un'orbita che circonda Q_1. Mentre per quanto riguarda Q_2 possiamo concludere che un'orbita periodica non può esistere usando il criterio di Dulac con $\rho(x, y) = \frac{1}{xy}$, e usando il segno del campo vettoriale sul semiasse positivo delle ascisse.

In conclusione ritroviamo i ritratti di fase di figura 1a, 1b e 2a.

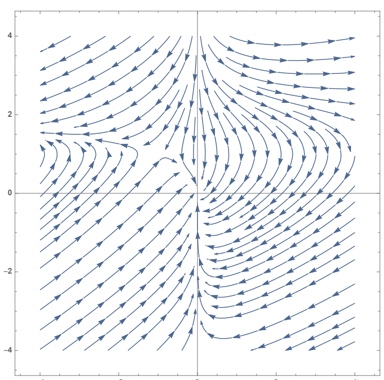


(a) Caso $\mu > 0$

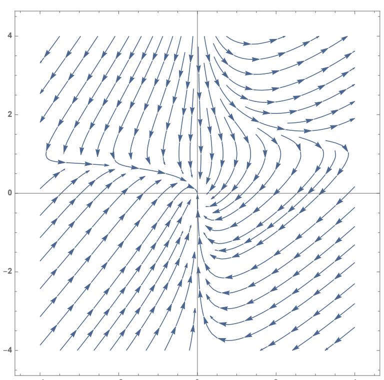


(b) Caso $\mu \in (-1, 0)$

Figure 1



(a) Caso $\mu < -1$



(b) Caso $\mu = -1$

Figure 2

Veniamo ora al caso $\mu = -1$. In questo caso, l'unico punto fisso è Q_1, per cui

$$JF(Q_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il punto Q_1 è quindi un nodo improprio attrattivo. Come nel caso precedente l'insieme $\{x = 0\}$ è invariante, e non esistono orbite periodiche.

Otteniamo quindi il ritratto di fase della figura 2b.

Esercizio 2. *Dato il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 4x^3 + 3x^5 - x^7 \end{cases}$$

(i) mostrare che si tratta di un sistema meccanico di tipo Hamiltoniano, e trovare la Lagrangiana;

Il sistema è di tipo Hamiltoniano se esiste una funzione $H(x, y)$ tale che

$$\begin{cases} \dot{x} = y = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = 4x^3 + 3x^5 - x^7 = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

Si ottiene che

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{8}x^8$$

che ha la forma $H(x, y) = \frac{1}{2m}y^2 + V(x)$, con $m = 1$ e

$$V(x) = \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{2}x^6 - x^4$$

e dunque si tratta di un sistema meccanico.

La Lagrangiana allora possiamo scriverla direttamente come

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x^4 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{8}x^8$$

(ii) studiare la stabilità dei punti critici;

Essendo il sistema di tipo Hamiltoniano e autonomo, la funzione $H(x, y)$ è un integrale primo. Quindi gli insiemi di livello di H sono insiemi invarianti, e i punti fissi del sistema verificano $\nabla H(x, y) = 0$, e corrispondono ai punti critici dell'energia potenziale $V(x)$. Otteniamo quindi

$$V'(x) = x^7 - 3x^5 - 4x^3 = x^3(x^4 - 3x^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-2, 0, 2\}$$

La stabilità dei punti critici inoltre si ottiene classificando il punto critico di V. Osservando che V ha radici in 0 e $\pm\sqrt{2 + \sqrt{12}}$, e utilizzando il segno di $V'(x)$, otteniamo il grafico di V in figura 3.

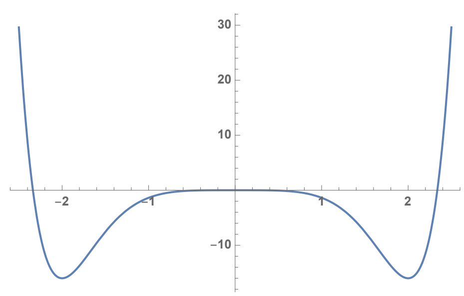


Figure 3: Il grafico di $V(x)$.

Se ne deduce che $x = 0$ è un punto di massimo locale, a cui corrisponde il punto fisso $P_1 = (0, 0)$ che è un punto di sella e quindi punto instabile, mentre $x = \pm 2$ sono punti di minimo locale, a cui corrispondono i punti fissi $P_2 = (-2, 0)$ e $P_3 = (2, 0)$, che sono centri e quindi punti stabili.

(iii) dire se esistono orbite illimitate.

Poiché la funzione Hamiltoniana è un integrale primo, un'orbita del sistema soddisfa

$$H(x(t), y(t)) = H(x(0), y(0)) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Inoltre

$$\lim_{(x,y)\to\infty} H(x, y) = +\infty$$

Quindi se $(x(t), y(t))$ fosse un'orbita illimitata si troverebbe un assurdo.

Esercizio 3. *Data la funzione* $f_a : [0, 1] \to [0, 1]$ *definita da*

$$f_a(x) = x^3 - a\, x(1 - x)$$

con $a \in [-2, 0]$*,*

(i) trovare i punti fissi del sistema al variare del parametro a*, e studiarne la stabilità;*

Studiamo innanzitutto alcune proprietà del grafico di f_a in $[0, 1]$. Si ha $f_a(0) = 0$ e $f_a(1) = 1$ per ogni a, e inoltre

$$f_a'(x) = 3x^2 + 2ax - a > 0 \quad \forall\, x \in (0, 1]$$

se $a \in [-2, 0]$.

Abbiamo quindi ottenuto che $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ sono punti fissi, e inoltre la funzione è crescente in tutto l'intervallo $[0, 1]$. Altri punti fissi li otteniamo come soluzioni diverse da x_1 e x_2 dell'equazione

$$f_a(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - a\, x(1 - x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x(x - 1)(x + a + 1) = 0$$

Quindi esiste un terzo punto fisso $x_3 = -(a+1)$ in $(0, 1)$ se $-1 < a+1 < 0$, quindi se $a \in (-2, -1)$.

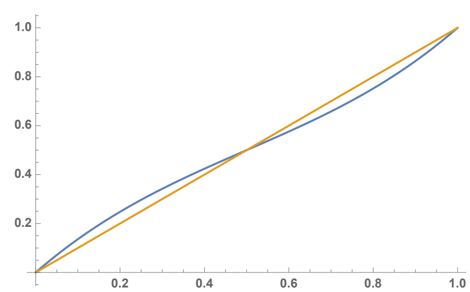


Figure 4: Il grafico di f_a per $a = -\frac{3}{2}$.

Passando allo studio della stabilità dei punti fissi trovati, calcoliamo il valore di f_a' nei punti fissi

$$f_a'(x_1) = -a\,, \qquad f_a'(x_2) = 3 + a$$

e per $a \in (-2,-1)$
$$f_a'(x_3) = a^2 + 3a + 3\,.$$

Consideriamo allora diversi intervalli di valori per a.

$-1 < a \leq 0$. Abbiamo solo due punti fissi, e $|f_a'(x_1)| < 1$ mentre $|f_a'(x_2)| > 1$. Quindi x_1 è attrattivo e x_2 è repulsivo;

$a = -1$. In questo caso abbiamo ancora solo due punti fissi, e $f_a'(x_2)| > 1$, quindi x_2 è repulsivo. Mentre $f_a'(x_1) = 1$, quindi x_1 non è iperbolico. Tuttavia dal grafico otteniamo $f_a(x) < x$ per ogni $x \in (0,1)$ e quindi x_1 è attrattivo da destra;

$-2 < a < -1$. Abbiamo tre punti fissi, con $|f_a'(x_1)| > 1$, $|f_a'(x_2)| > 1$ e $|f_a'(x_3)| < 1$. Quindi x_1 e x_2 sono repulsivi, mentre x_3 è attrattivo;

$a = -2$. Abbiamo solo due punti fissi, e $|f_a'(x_1)| > 1$, quindi x_1 è repulsivo. Mentre $f_a'(x_2) = 1$, quindi x_2 non è iperbolico. Tuttavia dal grafico otteniamo $f_a(x) > x$ per ogni $x \in (0,1)$ e quindi x_2 è attrattivo da sinistra.

(ii) discutere l'esistenza di orbite periodiche.

Per $a \in [-1,0]$, vale $f(x) < x$ per ogni $x \in (0,1)$, e quindi non possono esistere orbite periodiche di periodo minimo maggiore di uno. Infatti se $x \in (0,1)$ fosse un punto periodico di periodo minimo $p > 1$ si dovrebbe avere
$$x = f^p(x) < f(f^{p-1}(x)) < \cdots < f(x) < x$$
che è un assurdo.

Per $a \in (-2,-1)$, vale $f(x) > x$ in $(0,x_3)$ e $f(x) < x$ in $(x_3,1)$. Inoltre $f((0,x_3)) = (0,x_3)$ e $f((x_3,1)) = (x_3,1)$, quindi possiamo ripetere l'argomento di sopra ai due intervalli separatamente, e mostrare che non possono esistere orbite periodiche di periodo minimo maggiore di uno.

Per $a = -2$ si ha $f(x) > x$ per ogni $x \in (0,1)$, e di nuovo otteniamo che non possono esistere orbite periodiche di periodo minimo maggiore di uno.