Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Prova intermedia del 12-01-2024

Esercizio 1. (15 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu\,(2x+3y) - (x-y)(x^2+y^2)(1-\varepsilon\,x^2-\varepsilon\,y^2) \\ \dot{y} = \mu\,(-3x+3y) - (x+y)(x^2+y^2)(1-\varepsilon\,x^2-\varepsilon\,y^2) \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$ e di $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$.

(a) Porre $\varepsilon = 0$ e discutere l'esistenza di orbite periodiche al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

(b) Per ogni μ per cui esiste un'orbita periodica nel caso $\varepsilon = 0$, dire se esistono valori di $\varepsilon > 0$ per cui esiste un'orbita periodica.

Esercizio 2. (15 punti) Si consideri la famiglia di trasformazioni continue $f_\lambda : [0,1] \to [0,1]$ data da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 4x, & \text{se} \quad x \in J_1 = [0, \frac{1}{4}]; \\ \frac{3}{2} - 2x, & \text{se} \quad x \in J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ \frac{1}{2} + \lambda\left(x - \frac{1}{2}\right), & \text{se} \quad x \in J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]; \\ (\lambda+2)(1-x), & \text{se} \quad x \in J_4 = [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

per $\lambda \in [0,2]$.

(a) Discutere esistenza e stabilità dei punti fissi di f_λ al variare di λ.

(b) Si costruisca l'f_λ-grafo associato alla partizione $J = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ al variare di λ.

(c) Dire per quali valori di λ esiste un ferro di cavallo per f_λ^2.

$\boxed{\text{ESERCIZIO } 1}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(2x+3y) - (x-y)(x^2+y^2)(1-\varepsilon x^2 - \varepsilon y^2) \\ \dot{y} = \mu(-3x+3y) - (x+y)(x^2+y^2)(1-\varepsilon x^2 - \varepsilon y^2) \end{cases}$$

$$\mu \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in [0,+\infty)$$

$\boxed{(a) \ \varepsilon = 0}$ Per discutere l'esistenza di orbite periodiche, passiamo alle coordinate polari $(\rho, \vartheta) \in (0,+\infty) \times S^1$. Osserviamo che l'origine $(x,y) = (0,0)$ è un punto fisso del sistema.

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho}(x\dot{x} + y\dot{y})\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\mu(2x^2+3xy-3xy+3y^2) - (x^2+y^2)(x^2-xy+xy+y^2)\right]\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\mu(2\rho^2 + \rho^2\sin^2\vartheta) - \rho^4\right] = \rho\mu(2+\sin^2\vartheta) - \rho^3$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{\rho^2}(x\dot{y} - y\dot{x})\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[\mu(-3x^2+3xy-2xy-3y^2) - (x^2+y^2)(x^2+xy-xy+y^2)\right]\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[\mu(-3\rho^2 + \rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta) - \rho^4\right] = -\mu(3-\cos\vartheta\sin\vartheta) - \rho^2$$

Abbiamo quindi ottenuto il sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho\mu(2+\sin^2\vartheta) - \rho^3 \\ \dot{\vartheta} = -\mu(3-\cos\vartheta\sin\vartheta) - \rho^2 \end{cases}$$

$\boxed{-\ \mu \le 0}$ In questo caso

$$\dot{\rho} \le -\rho^3 < 0 \quad \forall (\rho,\vartheta) \in (0,+\infty) \times S^2$$

quindi non possono esserci orbite periodiche.

$\boxed{-\ \mu > 0}$ Iniziamo osservando che

$$\dot{\vartheta} = -\mu(3-\cos\vartheta\sin\vartheta) - \rho^2 < -2\mu - \rho^2 < 0 \quad \forall (\rho,\vartheta) \in (0,+\infty) \times S^1$$

quindi non esistono punti fissi del sistema diversi dall'origine.

Inoltre $\dot\rho = \rho\left[\mu(2+\sin^2\vartheta)-\rho^2\right]$ e quindi

$$\dot\rho > 0 \iff \rho < \sqrt{\mu(2+\sin^2\vartheta)}$$

Poiché

$$\sqrt{2\mu} \le \sqrt{\mu(2+\sin^2\vartheta)} \le \sqrt{3\mu} \qquad \forall\vartheta\in S^1$$

otteniamo che

$$\rho < \sqrt{2\mu} \implies \dot\rho > 0$$
$$\rho > \sqrt{3\mu} \implies \dot\rho < 0$$

Allora ponendo $D_\mu = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \mu \le x^2+y^2 \le 4\mu\}$ abbiamo che

- D_μ è un insieme compatto
- D_μ non contiene punti fissi
- $\forall (x_0,y_0)\in\partial D_\mu$ si ha che $\phi_t(x_0,y_0)\in D_\mu$ $\forall\, t\ge 0$

Valgono quindi le ipotesi del Teorema di Poincaré-Bendixson, ed allora esiste un'orbita periodica in D_μ $\forall\,\mu>0$.

$\boxed{\text{(b) } \varepsilon>0}$ Fissiamo $\mu>0$ e mostriamo che $\exists\,\varepsilon_0(\mu)>0$ t.c. $\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0(\mu))$ il sistema ammette un'orbita periodica.

Passando nuovamente alle coordinate polari si trova

$$\begin{cases} \dot\rho = \rho\mu(2+\sin^2\vartheta) - \rho^3(1-\varepsilon\rho^2) \\ \dot\vartheta = -\mu(3-\cos\vartheta\sin\vartheta) - \rho^2(1-\varepsilon\rho^2) \end{cases}$$

Consideriamo, come nel punto (a), $D_\mu = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \mu \le x^2+y^2 \le 4\mu\}$. Valgono:

- D_μ è un insieme compatto.
- D_μ non contiene punti fissi se $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{4\mu}\right)$

  Basta che $(1-\varepsilon\rho^2)\big|_{D_\mu} > 0$. Se questo è vero si ha infatti

  $$\dot\vartheta\big|_{D_\mu} \le -2\mu - \rho^2(1-\varepsilon\rho^2)\big|_{D_\mu} \le -2\mu < 0$$

  e non possono esserci punti fissi in D_μ.

  Poiché $(1-\varepsilon\rho^2)\big|_{D_\mu} \ge 1-4\varepsilon\mu$ si ha che $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{4\mu}\right) \implies (1-\varepsilon\rho^2)\big|_{D_\mu} > 0$.

- $\forall (x_0,y_0)\in\partial D_\mu$ si ha che $\phi_t(x_0,y_0)\in D_\mu$ $\forall\, t\ge 0$ se $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{16\mu}\right)$

Vale che

$$\dot{\rho}\Big|_{\rho=\sqrt{\mu}} = \sqrt{\mu}\left[\mu(2+\sin^2\vartheta) - \mu(1-\varepsilon\mu)\right] =$$

$$= \mu\sqrt{\mu}\left(2+\sin^2\vartheta+\varepsilon\mu-1\right) \geq \mu\sqrt{\mu}\left(1+\varepsilon\mu\right) > 0, \quad \forall \varepsilon>0$$

$$\dot{\rho}\Big|_{\rho=\sqrt{4\mu}} = 2\sqrt{\mu}\left[\mu(2+\sin^2\vartheta) - 4\mu(1-4\varepsilon\mu)\right] =$$

$$= 2\mu\sqrt{\mu}\left(2+\sin^2\vartheta+16\varepsilon\mu-4\right) \leq 2\mu\sqrt{\mu}\left(16\varepsilon\mu-1\right) < 0$$

$$\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{16\mu}\right)$$

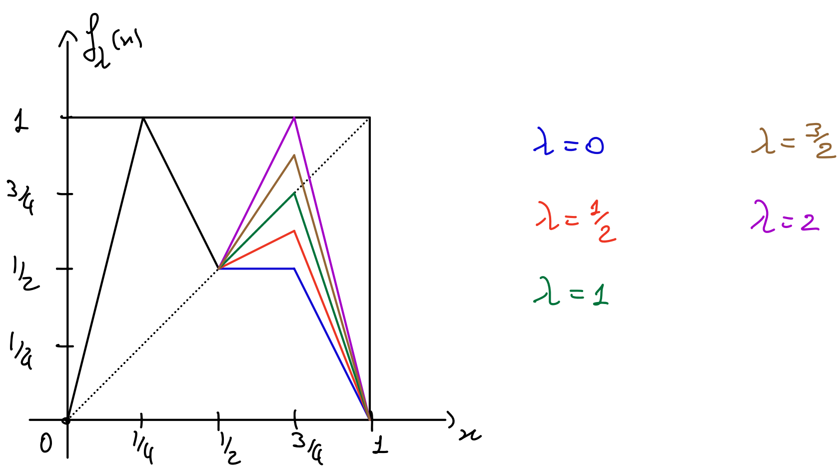
Quindi, per ogni $\mu>0$ se $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0(\mu))$ con $\varepsilon_0(\mu)=\frac{1}{16\mu}$, possiamo applicare il Teorema di Poincaré-Bendixson all'insieme D_μ e ottenere l'esistenza di un'orbita periodica per il sistema in D_μ.

ESERCIZIO 2

$$f_\lambda : [0,1] \to [0,1], \qquad f_\lambda(x) = \begin{cases} 4x, & x\in J_1=[0,\frac{1}{4}] \\ \frac{3}{2}-2x, & x\in J_2=[\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}+\lambda(x-\frac{1}{2}), & x\in J_3=[\frac{1}{2},\frac{3}{4}] \\ (\lambda+2)(1-x), & x\in J_4=[\frac{3}{4},1] \end{cases}$$

$$\lambda\in[0,2]$$

Disegniamo il grafico di f_λ per alcuni valori di λ.



(a) Al variare di $\lambda\in[0,2]$, cambia f_λ in $J_3\cup J_4=[\frac{1}{2},1]$ e in particolare cambia il valore di $f_\lambda(\frac{3}{4}) = \frac{\lambda+2}{4}$.

In $J_1\cup J_2=[0,\frac{1}{2}]$, f_λ ha due punti fissi $\forall\lambda\in[0,2]$:

$$x_1 = 0 \qquad e \qquad x_2 = 1/2$$

Poiché $(f_\lambda')_+(0) = 4 \quad \forall \lambda \in [0,2]$ si ha che x_1 è repulsivo $\forall \lambda \in [0,2]$

Osserviamo che $(f_\lambda')_-(\frac{1}{2}) = -2 \quad \forall \lambda \in [0,2]$, ma la stabilità di x_2 dipende da $f_\lambda|_{J_3}$. Abbiamo che:

- $\lambda \in [0,1) \implies f_\lambda^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_2 \quad \forall x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ e $f_\lambda^n(x) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \; \forall n \geq 0$.
  Inoltre se $x \in (\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$ si ha $f_\lambda(x) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, quindi $f_\lambda^n(x) \to x_2$ $\forall x \in (\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$. Ne segue che x_2 è attrattivo.
- $\lambda = 1 \implies f_\lambda(x) = x \quad \forall x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Come prima $f_\lambda(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ quindi x_2 ha una forma di stabilità e non è repulsivo, ma non è attrattivo.
- $\lambda \in (1,2]$. In questo caso $(f_\lambda')_+(\frac{1}{2}) = \lambda$ e dunque x_2 è repulsivo.

Se $\lambda \in [1,2]$ ci sono anche altri punti fissi.

- $\lambda = 1 \implies$ ogni $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ è fisso, e come osservato sopra per x_2, questi punti sono stabili ma non attrattivi.
- $\lambda \in (1,2] \implies$ c'è un punto fisso in J_4 dato da

$$x_3 = \frac{\lambda+2}{\lambda+3}$$

  Poiché $f_\lambda'(x_3) = -(\lambda+2)$ e $|-(\lambda+2)| > 1 \quad \forall \lambda \in (1,2]$ si ha che x_3 è repulsivo $\forall \lambda \in (1,2]$.

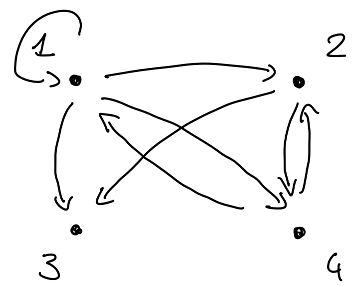
(b) Studiamo l'immagine degli intervalli J_1, J_2, J_3, J_4 al variare di $\lambda \in [0,2]$.

- $f(J_1) = [0,1] \quad \forall \lambda \in [0,2]$, dunque J_1 ricopre $J_1, J_2, J_3, J_4 \quad \forall \lambda \in [0,2]$
- $f(J_2) = [\frac{1}{2}, 1] \quad \forall \lambda \in [0,2]$, dunque J_2 ricopre $J_3, J_4 \quad \forall \lambda \in [0,2]$
- $f(J_3) = [\frac{1}{2}, \frac{\lambda+2}{4}]$, dunque
  - $\lambda \in [0,1)$, J_3 non ricopre nessuno degli intervalli
  - $\lambda \in [1,2)$, J_3 ricopre J_3
  - $\lambda = 2$, J_3 ricopre J_3, J_4
- $f(J_4) = [0, \frac{\lambda+2}{4}]$, dunque

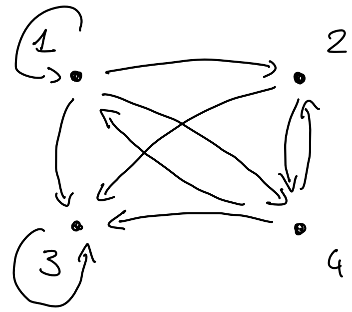
- $\lambda \in [0,1)$, J_4 ricopre J_1, J_2
- $\lambda \in [1,2)$, J_4 ricopre J_1, J_2, J_3
- $\lambda = 2$, J_4 ricopre J_1, J_2, J_3, J_4

L'f_λ-grafo va dunque disegnato in tre casi:

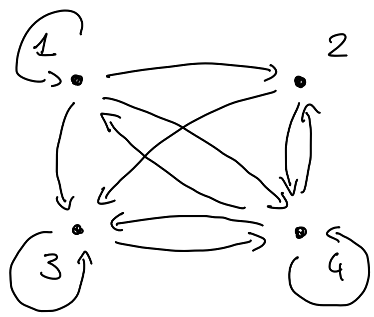
- $\lambda \in [0,1)$,



- $\lambda \in [1,2)$,



- $\lambda = 2$,



$\boxed{\text{(c)}}$

Sappiamo che condizione sufficiente per l'esistenza di un ferro di cavallo per f_λ^2 è l'esistenza di un'orbita periodica di f_λ di periodo minimo m dispari e $m > 1$.

Osserviamo che negli f_λ-grafi costruiti nel punto (b), $\forall \lambda \in [0,2]$ si ha il cammino ammissibile $J_1 J_2 J_4 J_1$. Quindi $\exists\, \bar{x}_\lambda \in J_1$ t.c. $f_\lambda^3(\bar{x}_\lambda) = \bar{x}_\lambda$ e, poiché $J_1 \cap J_4 = \emptyset$ e $f_\lambda^2(\bar{x}_\lambda) \in J_4$, si ha $f_\lambda(\bar{x}_\lambda) \neq \bar{x}_\lambda$.

Quindi $\forall \lambda \in [0,2]$ f_λ ha un'orbita periodica di periodo minimo 3 e quindi f_λ^2 ha un ferro di cavallo $\forall \lambda \in [0,2]$.