Elementi di Matematica e Statistica
Corso di Laurea in Tecniche per le Costruzioni Civili e la Gestione del Territorio
Compito del 12-02-2025

Esercizio 1. Determinare il dominio naturale D della funzione

$$f(x) = \log(\sqrt{x+1})$$

e dire come si comporta la funzione agli estremi di D.

Esercizio 2. Trovare gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui a $+\infty$ per la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Esercizio 3. Determinare l'insieme C dei punti nel quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}\,, & \text{se } x \neq 2; \\ 0\,, & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

è continua, e classificare le eventuali discontinuità.

Esercizio 4. Risolvere con il metodo grafico la disequazione

$$\log(2x) + x \leq \frac{1}{2}$$

Esercizio 5. Un campione statistico x contiene i seguenti dati

$$x = \{-4, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3\}$$

Rappresentare il campione con un istogramma, e calcolare media e varianza del campione.

Esercizio 6. Dire se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti. Se non lo sono, trovare un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti in numero massimo. Usare l'eliminazione di Gauss per rispondere alla domanda.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\-6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Trovare l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

usando l'eliminazione di Gauss.

Esercizio 8. Risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

usando il metodo di Cramer.

ES. 1

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x+1}\right)$$

Il dominio naturale di f è dato da

$$D = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; \sqrt{x+1} > 0 \,,\quad x+1 \geq 0 \}$$

Poiché $\sqrt{x+1} > 0 \iff x+1>0$ si trova

$$D = (-1, +\infty)$$

Gli estremi di D sono dunque -1 e $+\infty$, e non appartengono a D.

Calcoliamo

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \log\left(\sqrt{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\log x} = +\infty$$

ES. 2

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Il dominio naturale di f è $D = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; x^2+1 \geq 0 \} = \mathbb{R}$.

Verifichiamo l'esistenza di asintoti a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} |x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} |x|\cdot 1 = +\infty$$

quindi f non ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. Vediamo se ha un asintoto obliquo. Calcoliamo

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x}\cdot 1 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 \cdot 1 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - a x \right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+1} - x \right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+1} - x \right] \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\cdot 2} = 0$$

Quindi f ha asintoto obliquo a $+\infty$ dato da $y = x$

ES. 3

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 0, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Il dominio naturale di f è $D = \mathbb{R}$. Inoltre su $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, la funzione si scrive come composizione di funzioni continue, quindi f è continua certamente in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Resta da valutare come si comporta in 2. Affinché f sia continua in 2 deve verificarsi $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$. Calcoliamo

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Quindi $\lim_{x \to 2} f(x)$ non esiste. Ne segue che $C = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, e in f ha in 2 una discontinuità di seconda specie.

ES. 4

$$\log(2x) + x \leq \frac{1}{2}$$

Per ricondurci a funzioni il cui grafico è facile da disegnare, riscriviamo la disequazione come

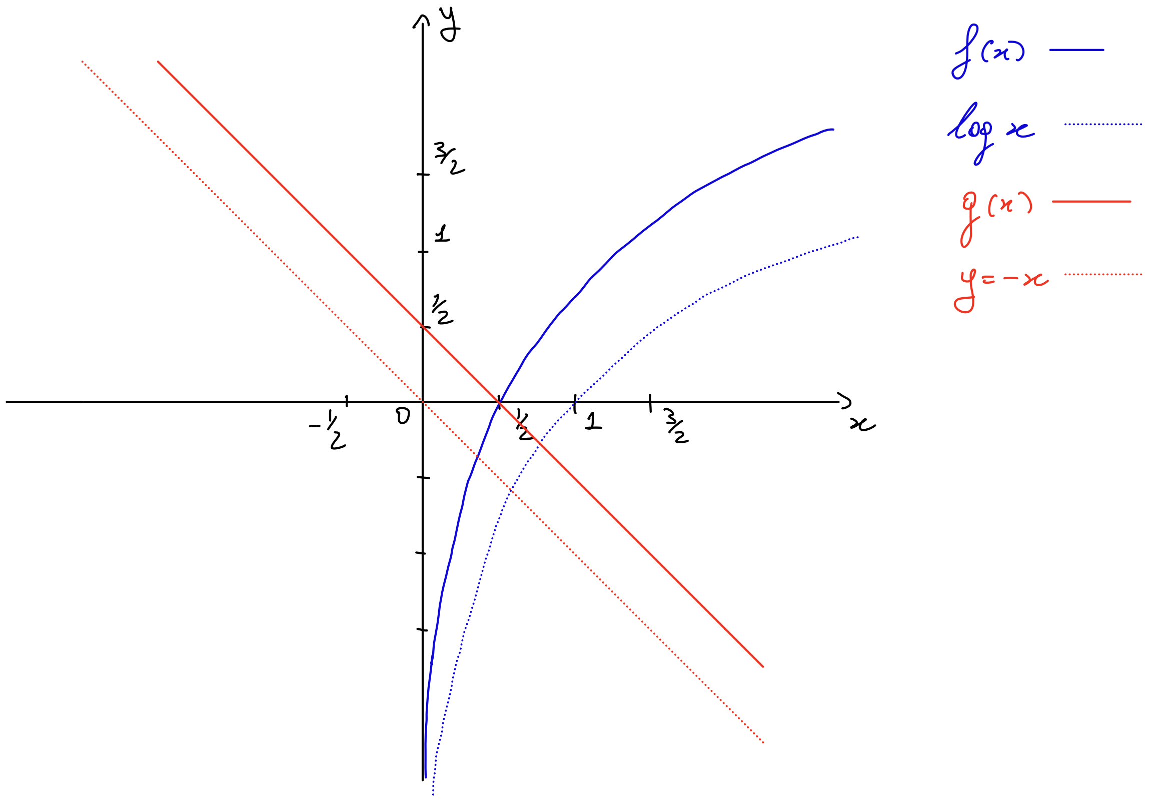
$$\log(2x) \leq -x + \frac{1}{2}$$

e poniamo $f(x) = \log(2x)$, $g(x) = -x + \frac{1}{2}$.

Per disegnare il grafico di f, osserviamo innanzitutto che il suo dominio naturale è $\{x > 0\}$. Poi partiamo dal grafico di $\log x$ e lo restringiamo lungo l'ascisse, usando che $f(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$.

Il grafico di g è la retta di equazione $y = -x + \frac{1}{2}$, che è la retta $y = -x$ traslata in alto di $\frac{1}{2}$.

Otteniamo quindi

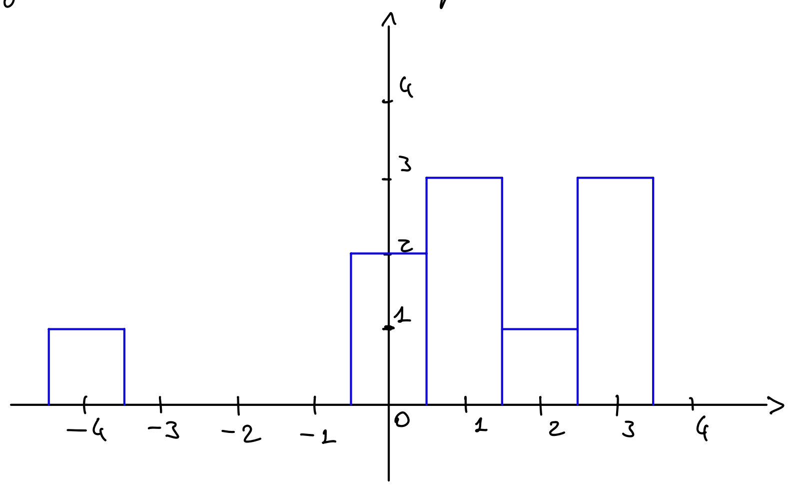


Quindi $f(x) \le g(x)$ per $x \in (0, \frac{1}{2}]$

ES. 5

$$x = \{-4, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3\}$$

L'istogramma relativo al campione statistico x è



La media $\bar{x}$ del campione si calcola come

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

dove N è la numerosità del campione, in questo caso $N = 10$, e x_i sono i dati. Quindi

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \left(-4 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 3 \right) = \frac{10}{10} = 1.$$

La varianza del campione si calcola come

$$\mathrm{var}(x) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \bar{x}^2$$

quindi

$$\mathrm{var}(x) = \frac{1}{10}\left((-4)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2\right) - 1^2 =$$

$$= \frac{50}{10} - 1 = 4.$$

Soluzione esercizio 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I primi tre vettori corrispondono ai pivot e quindi sono linearmente indipendenti (non è l'unica scelta). I quattro vettori nell'insieme sono invece linearmente dipendenti in quanto nella matrice ridotta sono presenti solo tre pivot e quindi il determinante della matrice originale si annulla (una riga è zero).

Soluzione esercizio 7

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 8

$$x = -1/8, \quad y = 9/8, \quad z = 3/8$$