Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 12-04-2022

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y^2 - 1) \\ \dot{y} = -x^2\,y + y^3(y^2 - 1) \end{cases}$$

(a) Determinare i punti fissi. Trovare una funzione di Lyapunov stretta per il punto fisso $(0,0)$, e dire se gli altri punti fissi sono stabili o instabili.

(b) Studiare il segno del campo di vettori, ed usarlo per disegnare il ritratto di fase del sistema.

Esercizio 2. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-y)^3 - (\mu+1)(x-y) + y \\ \dot{y} = y - \mu(x-y) \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la trasformazione $f_\lambda : [0,1] \to [0,1]$

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 2x\,, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1\,, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

per $\lambda \in (0,2]$.

(a) Discutere i punti fissi del sistema al variare del parametro λ, e studiarne la stabilità.

(b) Studiare l'esistenza e la stabilità di orbite periodiche di periodo minimo 2 al variare di λ.

(c) Dimostrare che il sistema è caotico per $\lambda > \frac{3}{2}$.

ES. 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y^2-1) \\ \dot{y} = -x^2 y + y^3(y^2-1) \end{cases}$$

(a) I punti fissi del sistema sono le soluzioni di

$$\begin{cases} x(y^2-1) = 0 \\ -xy^2 + y^3(y^2-1) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $x=0$ oppure $y=\pm 1$.
Sostituendo $x=0$ nella seconda si trovano i punti fissi

$$P_1=(0,0) \quad , \quad P_2=(0,+1) \quad , \quad P_3=(0,-1)$$

Sostituendo $y=\pm 1$ nella seconda equazione non si trovano altri punti fissi.

Cerchiamo se una funzione di Lyapunov stretta per $P_1=(0,0)$.

Poniamo $V(x,y) = A x^{2n} + B y^{2m}$, con $A,B>0$ e $n,m \in \mathbb{N}$.
In questo modo la funzione V ha in P_1 un punto di minimo stretto.

Si ottiene

$$\dot{V}(x,y) = 2nA\, x^{2n-1}\left(x(y^2-1)\right) + 2mB\, y^{2m-1}\left(-x^2y+y^5-y^3\right) =$$
$$= \underline{2nA\,x^{2n}}\,\underline{y^2} - 2nA\,x^{2n} - \underline{2mB\,x^2}\,\underline{y^{2m}} + 2mB\,y^{2m+2}(y^2-1)$$

Cercando di eliminare i termini misti (evidenziati in rosso), si pone $2nA = 2mB$, $2n=2$, $2=2m$, da cui $n=m=1$, $A=B$.
Quindi per $V(x,y) = x^2+y^2$ si trova

$$\dot{V}(x,y) = -2x^2 + 2y^4(y^2-1) = -2x^2 - 2y^4(1-y^2) =$$

$$= -2\left[x^2 + y^4(1-y^2)\right] < 0 \quad \forall (x,y) \in \{|y|<1\} \setminus \{(0,0)\}$$

La funzione $V(x,y)$ è quindi una buona funzione di Lyapunov stretta per $P_1 = (0,0)$ in $U(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |y| < 1\}$.

Consideriamo adesso P_2 e P_3. Studiando la matrice jacobiana del campo si ha

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} y^2-1 & 2xy \\ -2xy & -x^2+5y^4-3y^2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$JF(0,+1) = JF(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

I punti P_2 e P_3 sono dunque non iperbolici (infatti $JF(0,\pm 1)$ ha autovalori 0 e 2), ma la presenza di un autovalore con parte reale positiva ci fa sospettare che siano instabili nella direzione dell'autovettore corrispondente ($v = \binom{0}{1}$ in questo caso).

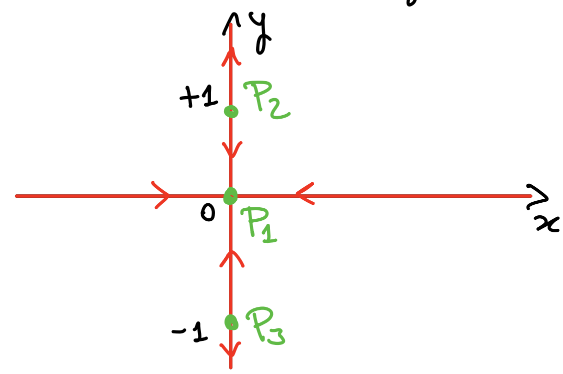
Studiando il sistema evidenziamo che gli cartesiani sono invarianti. Infatti

$$\dot{x}\big|_{x=0} = x(y^2-1)\big|_{x=0} = 0$$

e

$$\dot{y}\big|_{y=0} = -x^2y + y^3(y^2-1)\big|_{y=0} = 0$$

Possiamo quindi intuire e disegnare il ritratto di fase



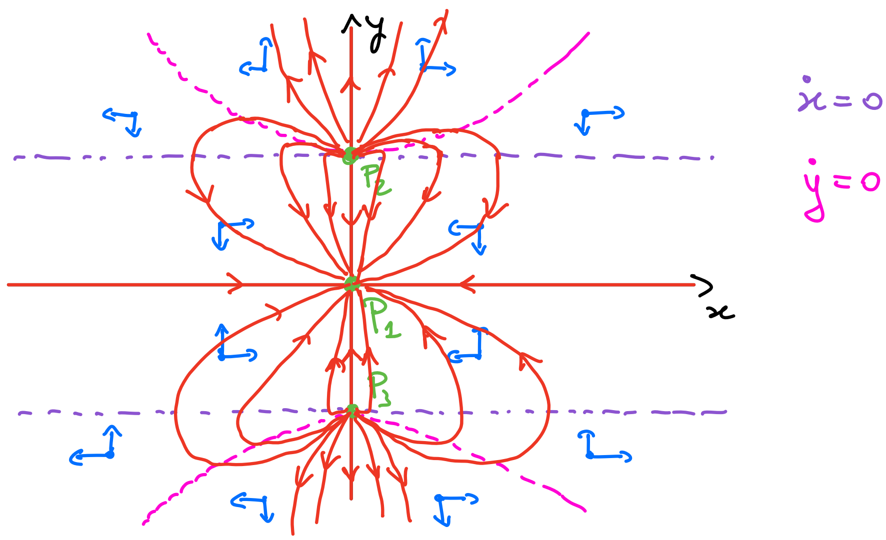
Ne segue che P_2 e P_3 sono instabili.

(b) Studiamo il segno del campo di vettori

$$\dot{x} > 0 \iff x > 0 \text{ e } y^2 > 1 \quad \text{oppure} \quad x < 0 \text{ e } y^2 < 1$$

$$\dot{y} = y\left(-x^2 + y^2(y^2-1)\right) > 0 \iff y > 0 \text{ e } |x| < \sqrt{y^2(y^2-1)} \quad \text{oppure}$$
$$y < 0 \text{ e } |x| > \sqrt{y^2(y^2-1)}$$

Possiamo quindi disegnare il ritratto di fase del sistema. Si può verificare che il sistema è simmetrico per la riflessione rispetto ai due assi. Inoltre non ci sono orbite periodiche (potrebbero esistere solo intorno ai punti fissi, ma l'invarianza degli assi ne impedisce l'esistenza.)



ES. 2

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-y)^3 - (\mu+1)(x-y) + y \\ \dot{y} = y - \mu(x-y) \end{cases}$$

- Punti fissi. Si ottengono come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (x-y)^3 - (\mu+1)(x-y) + y = 0 \\ y - \mu(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x-y)^3 - (x-y) = 0 \\ y - \mu(x-y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left[(x-y)^2 - 1\right] = 0 \\ y - \mu(x-y) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $x-y=0$ oppure $(x-y)^2 = 1$.
Se $x-y=0$, dalla seconda si trova $y=0$, e quindi si ottiene la prima soluzione

$$P_1 = (0,0)$$

Se $(x-y) = +1$, dalla seconda si trova $y=\mu$, e quindi si ottiene

$$P_2 = (\mu+1, \mu)$$

Se $(x-y) = -1$, si ottiene infine

$$P_3 = (-\mu-1, -\mu)$$

- Stabilità La matrice jacobiana del campo è

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 3(x-y)^2 - (\mu+1) & -3(x-y)^2 + (\mu+1) + 1 \\ -\mu & 1+\mu \end{pmatrix}$$

Quindi

$$JF(P_1) = JF(0,0) = \begin{pmatrix} -\mu-1 & \mu+2 \\ -\mu & \mu+1 \end{pmatrix}$$

$$\det JF(P_1) = -(\mu+1)^2 + \mu(\mu+2) = -\mu^2-2\mu-1+\mu^2+2\mu = -1$$

e dunque P_1 è punto di sella $\forall \mu \in \mathbb{R}$.

$$JF(P_2) = JF(\mu+1, \mu) = \begin{pmatrix} 2-\mu & \mu-1 \\ -\mu & \mu+1 \end{pmatrix}$$

$$\det JF(P_2) = (2-\mu)(\mu+1) + \mu(\mu-1) = \mu+2-\mu^2+\mu^2-\mu = 2 > 0$$

$$\operatorname{tr} JF(P_2) = 3 > 0$$

$$(\operatorname{tr} JF(P_2))^2 - 4 \det JF(P_2) = 9 - 8 = 1 > 0$$

e dunque P_2 è un nodo instabile $\forall \mu \in \mathbb{R}$

$$JF(P_3) = JF(-\mu-1, -\mu) = \begin{pmatrix} 2-\mu & \mu-1 \\ -\mu & \mu+1 \end{pmatrix} = JF(P_2)$$

e dunque anche P_3 è un nodo instabile $\forall \mu \in \mathbb{R}$.

- <u>Rette invarianti</u>. Ponendo $I(x,y) = ax+by-c$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$ consideriamo

$$\dot{I}\big|_{I=0} = a\dot{x} + b\dot{y}\big|_{I=0} = a\left[(x-y)^3 - (\mu+1)(x-y) + y\right] + b\left[y - \mu(x-y)\right]\Big|_{I=0} =$$

$$= (x-y)\left[a(x-y)^2 - a(\mu+1) - b\mu\right] + (a+b)y\,\Big|_{I=0}$$

Se $a = -b = 1$ si trova

$$\dot{I}\big|_{I=0} = (x-y)\left[a(x-y)^2 - a(\mu+1) - b\mu\right]\Big|_{I=0} = a(x-y)\left[(x-y)^2 - 1\right]\Big|_{x-y=c} \equiv 0$$

per ogni $\mu \in \mathbb{R}$ se $c \in \{-1, 0, +1\}$.

Se $a=c=0$ e $b=1$ si trova

$$\dot{I}\big|_{I=0} = -b\mu(x-y) + by\big|_{y=0} = -b\mu x \equiv 0 \quad \text{se } \mu=0.$$

Ci sono quindi tre rette invarianti $\boxed{\forall \mu \in \mathbb{R}}$: $y=x$, $y=x+1$, $y=x-1$

e una retta invariante in più se $\boxed{\mu=0}$: $y=0$

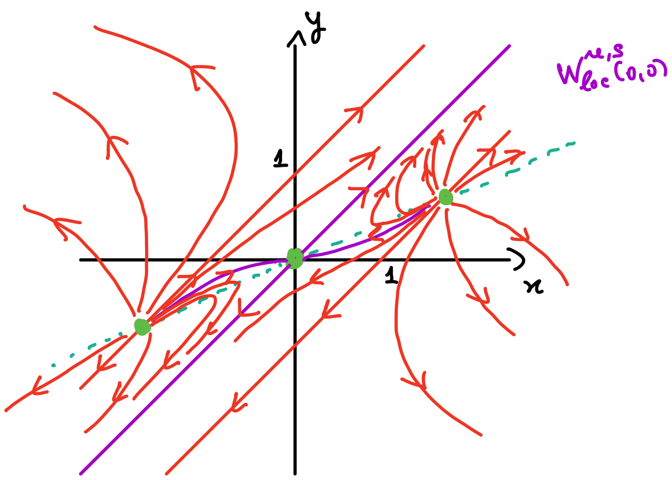
- Orbite periodiche. Calcoliamo la divergenza del campo di vettori. Si ha

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-y)^3 - (\mu+1)(x-y) + y\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[y - \mu(x-y)\right] =$$

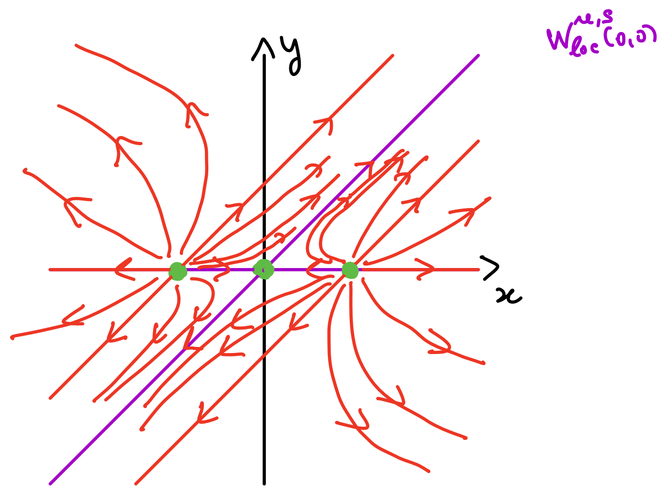
$$= 3(x-y)^2 - (\mu+1) + 1 + \mu = 3(x-y)^2.$$

Dunque $\operatorname{div} F > 0$ $\forall (x,y) \in \{x-y>0\} \cup \{x-y<0\}$. Per il criterio di Bendixson-Dulac non ci sono orbite periodiche contenute in $\{x-y>0\}$ o in $\{x-y<0\}$. Poiché $\{x=y\}$ è invariante $\forall \mu$, non ci sono orbite periodiche in $\mathbb{R}^2$.

- Ritratto di fase. $\dot{y}>0 \iff (\mu+1)y > \mu x$



$\mu > 0$



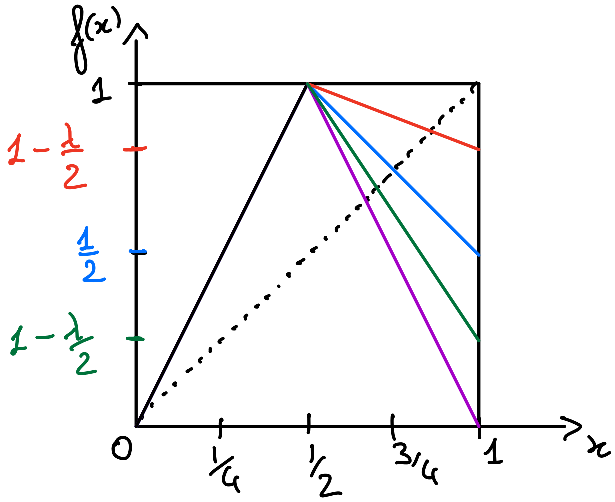
$\mu = 0$

Il caso $\mu<0$ è simile, con i punti fissi che si spostano.

ES. 3

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x \in [0, 1/2) \\ -\lambda(x - 1/2) + 1 & , \quad x \in [1/2, 1] \end{cases} \quad , \quad \lambda \in (0, 2]$$

Il grafico della funzione $f(x)$ è



$f_\lambda|_{[0,1/2)}$ $\forall \lambda$

$\lambda \in (0,1)$

$\lambda = 1$

$\lambda \in (1,2)$

$\lambda = 2$

Ci sono quindi due comportamenti diversi se $\lambda \in (0,1]$ o se $\lambda \in (1,2]$. Questo è dovuto al fatto che

$f_\lambda([1/2, 1]) \cap [0, 1/2) \neq \emptyset \iff 1 - \frac{\lambda}{2} < \frac{1}{2} \iff \lambda > 1.$

(a) I punti fissi si trovano ponendo $f_\lambda(x) = x$, da cui si trova che una soluzione è $P_1 = 0$ $\forall \lambda \in (0, 4]$, e l'altra soluzione si ottiene da

$$-\lambda(x - 1/2) + 1 = x \iff (1+\lambda)x = 1 + \frac{\lambda}{2}$$

$$\iff x = \frac{2+\lambda}{2(1+\lambda)} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \quad \forall \lambda \in (0,2]$$

Dunque l'altro punto fisso è $P_2 = \dfrac{2+\lambda}{2(1+\lambda)}$

Per la loro stabilità, osserviamo che $f_\lambda'(P_1) = 2$ $\forall \lambda \in (0,2]$

e dunque P_1 è sempre repulsivo.

In P_2 si ha $f_\lambda'(P_2) = -\lambda$, dunque

P_2 è attrattivo se $|-\lambda| < 1$, quindi se $\lambda \in (0,1)$

" è repulsivo se $|-\lambda| > 1$, " " $\lambda \in (1,2]$

Per $\lambda = 1$, $f_1|_{[\frac{1}{2},1]}$ mantiene invariate le distanze, e

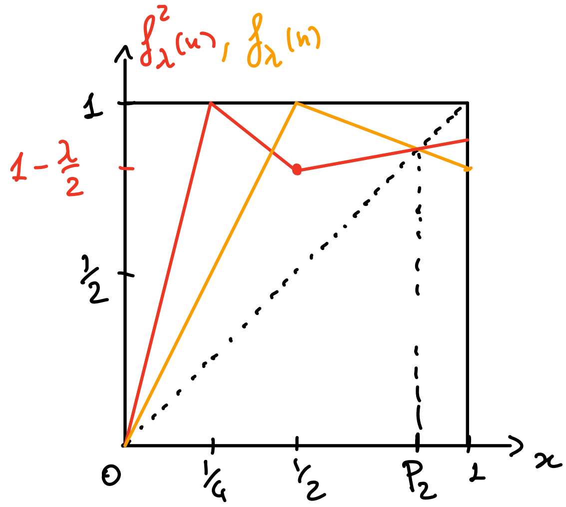
poiché $f_1([\frac{1}{2},1]) = [\frac{1}{2},1]$, il punto è stabile ma non

è attrattivo né repulsivo.

(b) <u>Caso $\lambda \in (0,1)$</u>

Poiché $f_\lambda([\frac{1}{2},1]) \subset [\frac{1}{2},1]$, f_λ^2 ha tre rami

$$f_\lambda^2(x) = \begin{cases} 2 f_\lambda(x) = 4x, & x \in [0,\frac{1}{2}) \text{ e } f_\lambda(x) \in [0,\frac{1}{2}) \\ -\lambda\left(f_\lambda(x) - \frac{1}{2}\right) + 1 = -\lambda\left(2x - \frac{1}{2}\right) + 1, & x \in [0,\frac{1}{2}) \text{ e } f_\lambda(x) \in [\frac{1}{2},1] \\ -\lambda\left(f_\lambda(x) - \frac{1}{2}\right) + 1 = -\lambda\left(-\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) + 1, & x \in [\frac{1}{2},1] \text{ e } f_\lambda(x) \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

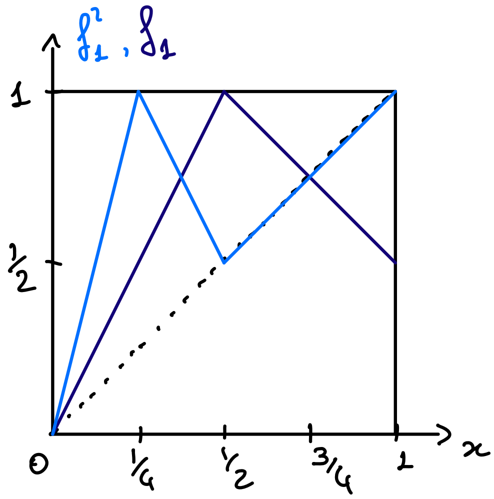


Non ci sono quindi orbite periodiche di periodo minimo 2.

<u>Caso $\lambda = 1$</u> Come sopra ci sono tre rami per f_λ^2, ma le

situazione è più semplice.

$$f_1^2(x) = \begin{cases} 2f_1(x) = 4x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \text{ e } f_1(x) \in [0, \frac{1}{2}) \\ -(f_1(x) - \frac{1}{2}) + 1 = -(2x - \frac{1}{2}) + 1, & x \in [0, \frac{1}{2}) \text{ e } f_1(x) \in [\frac{1}{2}, 1] \\ -(f_1(x) - \frac{1}{2}) + 1 = -(-(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}) + 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ e } f_1(x) \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



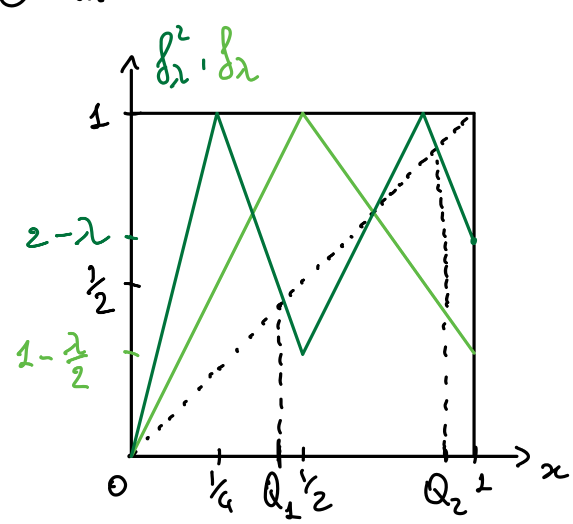
Tutti i punti di $[\frac{1}{2}, 1] \setminus \{\frac{3}{4}\}$ sono periodici di periodo minimo 2.

Tutte queste orbite sono stabili, ma non sono attrattive né repulsive.

<u>Caso $\lambda > 1$</u>

Poiché $f_\lambda([\frac{1}{2}, 1]) \cap [0, \frac{1}{2}] \neq \emptyset$, ci sono quattro rami per f_λ^2.

$$f_\lambda^2(x) = \begin{cases} 2f_\lambda(x) = 4x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \text{ e } f_\lambda(x) \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\lambda(f_\lambda(x) - \frac{1}{2}) + 1 = -\lambda(2x - \frac{1}{2}) + 1, & x \in [0, \frac{1}{2}) \text{ e } f_\lambda(x) \in [\frac{1}{2}, 1] \\ -\lambda(f_\lambda(x) - \frac{1}{2}) + 1 = -\lambda(-\lambda(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}) + 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ e } f_\lambda(x) \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 2f_\lambda(x) = -2\lambda(x - \frac{1}{2}) + 2, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ e } f_\lambda(x) \in [0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$



In questo caso sembra esistere un'orbita periodica di periodo minimo 2.

La troviamo imponendo

$$-2\lambda(x-\tfrac{1}{2})+2=x \iff (2\lambda+1)x = 2+\lambda \iff x=\frac{2+\lambda}{2\lambda+1}$$

da cui ricaviamo uno dei punti dell'orbita $Q_2=\frac{2+\lambda}{2\lambda+1}$, mentre l'altro punto è

$$Q_1 = f_\lambda(Q_2) = -\lambda\left(Q_2-\tfrac{1}{2}\right)+1 = -\lambda\left(\frac{2(2+\lambda)-(2\lambda+1)}{2(2\lambda+1)}\right)+1 =$$
$$= -\frac{3}{2}\frac{\lambda}{2\lambda+1}+1 = \frac{2+\lambda}{2(2\lambda+1)}$$

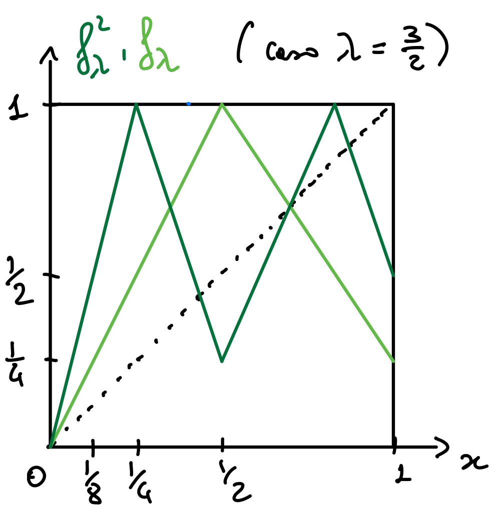
Per $\lambda>1$, si ha dunque l'orbita periodica $\{Q_1,Q_2\}$ con $Q_1\in[0,\tfrac{1}{2})$ e $Q_2\in[\tfrac{1}{2},1]$. Quindi

$$(f_\lambda^2)'(Q_1)=(f_\lambda^2)'(Q_2) = f_\lambda'(Q_1)\cdot f_\lambda'(Q_2) = -2\lambda$$

Poiché $|2\lambda|>1$ per $\lambda>1$, l'orbita è repulsiva.

(c) Una condizione sufficiente affinché il sistema sia caotico è che f_λ, che è una funzione continua, abbia un'orbita periodica di periodo minimo dispari.

Mostriamo che per $\lambda>\frac{3}{2}$, f_λ ha un'orbita periodica di periodo minimo 3.



Utilizzando il grafico di f_λ e di f_λ^2, osserviamo che

$f_\lambda^3(\frac{1}{4}) = f_\lambda(f_\lambda^2(\frac{1}{4})) = f_\lambda(1) = 1 - \frac{\lambda}{2} < \frac{1}{4}$ per $\lambda > \frac{3}{2}$

$f_\lambda^3(\frac{1}{8}) = f_\lambda^2(f_\lambda(\frac{1}{8})) = f_\lambda^2(\frac{1}{4}) = 1 > \frac{1}{8}$

Dunque il grafico di $f_\lambda^3\big|_{[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]}$ interseca la bisettrice, e genera quindi un punto di periodo 3, che è periodo minimo perché non ci sono punti fissi in $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$.