Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Test del 12-04-2021

Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 + \mu \\ \dot{y} = 2\,x\,y + \mu \end{cases}$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$. Studiare nei dettagli il caso $\mu = 0$.

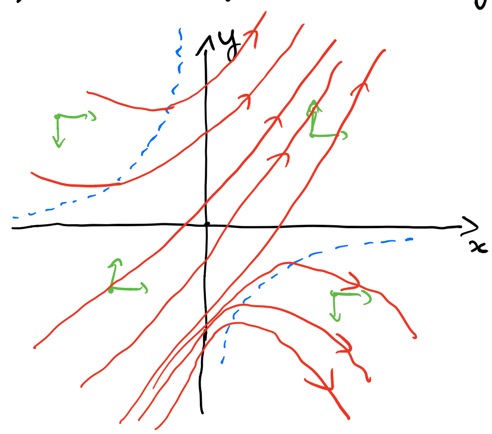
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 + \mu \\ \dot{y} = 2xy + \mu \end{cases}$$

<u>Punti fissi</u> $\quad \begin{cases} x^2 - 1 + \mu = 0 \\ 2xy + \mu = 0 \end{cases}$

Casi: $\mu > 1$, $\mu = 1$, $\mu < 1$ $(\mu = 0)$

$\mu > 1$ $\quad x^2 = 1 - \mu \Rightarrow \nexists$ punti fissi

$x^2 - 1 + \mu > 0 \quad \forall (x,y)$, $\quad 2xy = -\mu$ con $y = -\frac{\mu}{2x}$

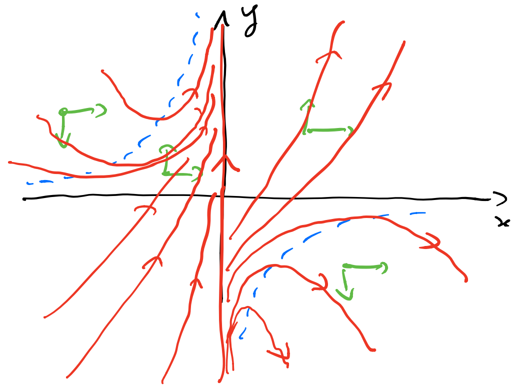


$\nexists$ orbite periodiche

$\mu = 1$ $\quad \begin{cases} x^2 = 0 \\ 2xy + 1 = 0 \end{cases} \quad \nexists$ punti fissi

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = 2xy + 1 \end{cases} \Rightarrow \{x = 0\} \text{ è insieme invariante}$$

$$I(x,y) = x \qquad \dot{I}(x,y) = x^2\Big|_{\{x=0\}} = 0 .$$



$\nexists$ orbite periodiche

$0<\mu<1$

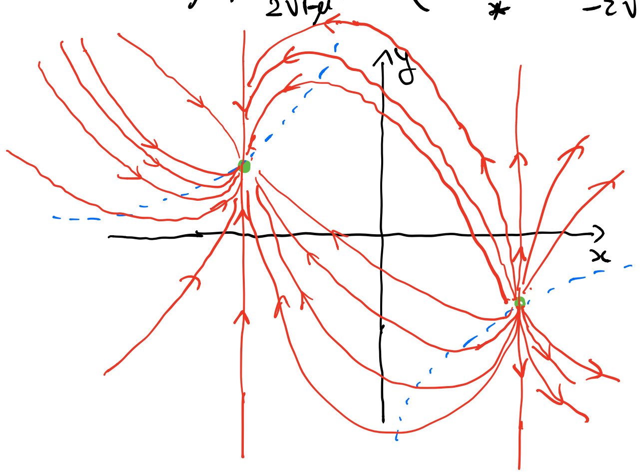
$$\begin{cases} x^2 = 1-\mu \\ 2xy = -\mu \end{cases}$$

$$(x,y) \in \left\{ \left(\sqrt{1-\mu}, -\frac{\mu}{2\sqrt{1-\mu}}\right), \left(-\sqrt{1-\mu}, \frac{\mu}{2\sqrt{1-\mu}}\right) \right\}$$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$JF\left(\sqrt{1-\mu}, -\frac{\mu}{2\sqrt{1-\mu}}\right) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{1-\mu} & 0 \\ * & 2\sqrt{1-\mu} \end{pmatrix}$$ NODO INSTABILE

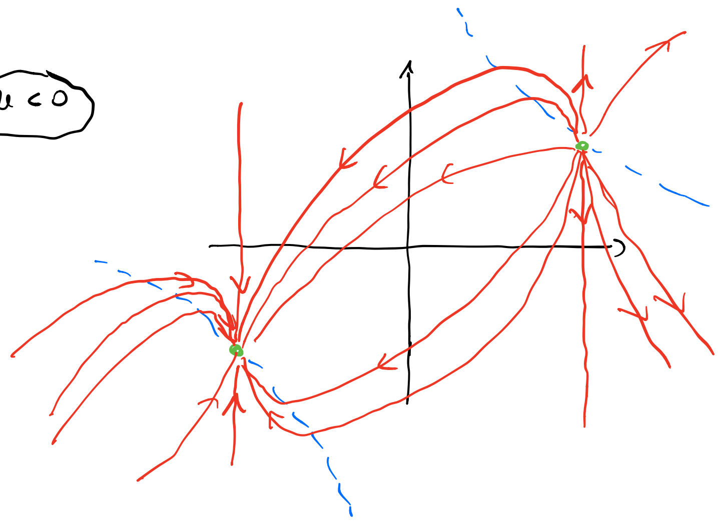
$$JF\left(-\sqrt{1-\mu}, \frac{\mu}{2\sqrt{1-\mu}}\right) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{1-\mu} & 0 \\ * & -2\sqrt{1-\mu} \end{pmatrix}$$ NODO STABILE



$\{x = \pm\sqrt{1-\mu}\}$ Rette invarianti

$\nexists$ orbite periodiche perché si dovrebbero trovare intorno ai punti fissi, ma ci sono le rette invarianti.

$\mu < 0$



Punti fissi

$$\left(\sqrt{1-\mu}\ ,\ -\frac{\mu}{2\sqrt{1-\mu}}\right)$$

$$\left(-\sqrt{1-\mu}\ ,\ +\frac{\mu}{2\sqrt{1-\mu}}\right)$$

$\boxed{\mu = 0}$

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$

(Oss Simmetrie , Insiemi invarianti $\{x = \pm 1\}$, $\{y = 0\}$)

Se $x \neq \pm 1$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2-1}$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^{x} \frac{2x}{x^2-1}\, dx$$

$$\log\left|\frac{y(x)}{y_0}\right| = \log\left|\frac{(x^2-1)}{x_0^2-1}\right|$$

$$y = c\,(x^2-1)$$