**Analisi Matematica II**
**Corso di Ingegneria Gestionale**
**Compito A del 11-06-2015**

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

**Esercizio 1. (13 punti)** Data la funzione

$$f(x,y) = \log\left(1+\sqrt{x^2+2y^2}\right)$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;$$

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\, x^2+2y^2\leq 1\,,\quad y+\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\geq 0\right\}.$$

**Esercizio 2. (9 punti)** Data la curva $(\gamma, I)$, con $I=[0,2\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,2\pi]\to\mathbb{R}^2\,,\qquad \gamma(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t+\sin t\,,\,\frac{1}{2}\cos t-\sin t\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P=\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{4}\,,\,\frac{1-2\sqrt{3}}{4}\right)$;

ii) calcolare il lavoro lungo la curva $(\gamma, I)$ del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{(x-1)^2+(y-1)^2} \\ \frac{x+y-2}{(x-1)^2+(y-1)^2} \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3. (10 punti)** Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\, x^2+z^2=\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)\,,\ 0\leq y\leq\pi\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P=\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{2}{3}\pi\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\, x^2+z^2\leq\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)\,,\ 0\leq y\leq\pi\,,\ x+z\geq 0\right\}$$

## Svolgimento

**Esercizio 1.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log\left(1+\sqrt{x^2+2y^2}\right)$$

*i) dire se esiste il limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;$$

Poniamo $g(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Il dominio della funzione $g$ è $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, e $(0,0)$ è quindi punto di accumulazione per $D$, dunque ha senso chiedere l'esistenza del limite.

Consideriamo innanzitutto le possibili direzioni di avvicinamento al punto costituite da rette della forma $\{y = \lambda x\}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sqrt{x^2(1+2\lambda^2)})}{\sqrt{x^2(1+\lambda^2)}} = \sqrt{\frac{1+2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\,,$$

dove abbiamo usato $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$.

Poiché il valore del limite dipende da $\lambda \in \mathbb{R}$, il limite non esiste.

*ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su*

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+2y^2 \le 1\,,\; y + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \ge 0\right\}.$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 1.

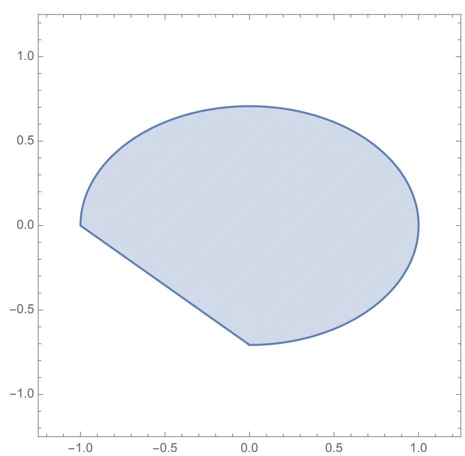


Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

Per studiare massimo e minimo assoluto di $f$ su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$ ed eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione $f$ è certamente differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, dove si scrive come composizione di funzioni differenziabili (la funzione $t \mapsto \sqrt{t}$ non è differenziabile in $t = 0$). L'origine

$$P = (0,0) \in \Omega$$

e quindi è un primo punto da considerare (si verifica che in effetti la funzione non è differenziabile nell'origine, ma accertarlo non è espressamente richiesto dall'esercizio).

Passiamo quindi alla ricerca dei punti critici liberi, che sono soluzioni del sistema in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{x}{(1+\sqrt{x^2+2y^2})\sqrt{x^2+2y^2}} = 0 \\ \frac{2y}{(1+\sqrt{x^2+2y^2})\sqrt{x^2+2y^2}} = 0 \end{cases}$$

Nell'insieme da considerare non ci sono soluzioni del sistema, e dunque non ci sono punti critici liberi.

Ci rimane da studiare il comportamento di $f$ sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ x^2 + 2y^2 = 1 \, , \, y + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ y + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \, , \, -1 \leq x \leq 0 \right\}.$$

Per quanto riguarda $\Gamma_1$, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \pi \right],$$

e componendo con $f$ troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log(2) \, , \qquad t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

Essendo la funzione $g_1$ costante, tutti i punti sono critici, e il valore che assume la funzione è uguale a quello che assume sugli spigoli $S_1$ ed $S_2$. Quindi non consideriamo altri punti su $\Gamma_1$. (Si poteva anche osservare subito che la funzione $f$ è costante su $\Gamma_1$ e vale $f(S_1) = f(S_2)$.)

Passiamo a $\Gamma_2$, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (1-t) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con $f$ e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log\left(1 + \sqrt{2t^2 - 2t + 1}\right), \qquad t \in [0,1]$$

Abbiamo $g_2'(t) = \frac{2t-1}{(1+\sqrt{2t^2-2t+1})\sqrt{2t^2-2t+1}}$, dunque l'unico punto critico è $t_0 = \frac{1}{2} \in (0,1)$. Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q = \gamma_2\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = 0\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = \log(2)\,, \quad f(Q) = \log\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

e poiché $1 + \sqrt{\frac{1}{2}} < 2$, il massimo di $f$ è $\log(2)$ e il minimo è 0.

**Esercizio 2.** *Data la curva $(\gamma, I)$, con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t + \sin t\,,\, \frac{1}{2}\cos t - \sin t\right)$$

*i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{1+2\sqrt{3}}{4}\,,\, \frac{1-2\sqrt{3}}{4}\right)$;*

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe $C^1$, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in I$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \left(\frac{1+2\sqrt{3}}{4}\,,\, \frac{1-2\sqrt{3}}{4}\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in [0, 2\pi]$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cos t_0 + \sin t_0 = \frac{1+2\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2}\cos t_0 - \sin t_0 = \frac{1-2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Sommando e sottraendo le due equazioni troviamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \cos t_0 = \frac{1}{2} \\ \sin t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

da cui si ricava che l'unica soluzione è $t_0 = \frac{\pi}{3}$. La retta tangente al sostegno nel punto $P$ è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(t_0) + \cos(t_0) \\ -\frac{1}{2}\sin(t_0) - \cos(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-2-\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto $P$ è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\frac{2+\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1+2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{2-\sqrt{3}}{4}\left(y - \frac{1-2\sqrt{3}}{4}\right) = 0\,.$$

*ii) calcolare il lavoro lungo la curva $(\gamma, I)$ del campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{(x-1)^2+(y-1)^2} \\ \frac{x+y-2}{(x-1)^2+(y-1)^2} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) =$$

$$= \frac{(x-1)^2+(y-1)^2-2(x+y-2)(x-1)}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2} - \frac{-(x-1)^2-(y-1)^2-2(x-y)(y-1)}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2} = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Essendo il suo dominio non semplicemente connesso, dobbiamo calcolare il lavoro per una curva chiusa che vada intorno al punto $(1,1)$.

Prima di chiederci se il campo è conservativo, studiamo le proprietà della curva $(\gamma, I)$. La curva verifica $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, quindi è chiusa, e chiediamoci se possiamo applicare il Teorema del Rotore. L'ipotesi fondamentale che dobbiamo verificare è che l'insieme $U$ racchiuso dalla curva sia tutto contenuto nel dominio del campo, ossia che $(1,1) \notin U$. Di questo ci convinciamo disegnando il sostegno di $(\gamma, I)$ (vedi figura 2).

Possiamo quindi applicare il Teorema del Rotore e otteniamo

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)\,dxdy = \iint_U 0\,dxdy = 0\,.$$

**Esercizio 3.** *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 = \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)\,,\, 0 \le y \le \pi\right\}$$

*i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P = \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{2}{3}\pi\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;*

La superficie $\Sigma$ è scritta come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = x^2 + z^2 - \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)$$

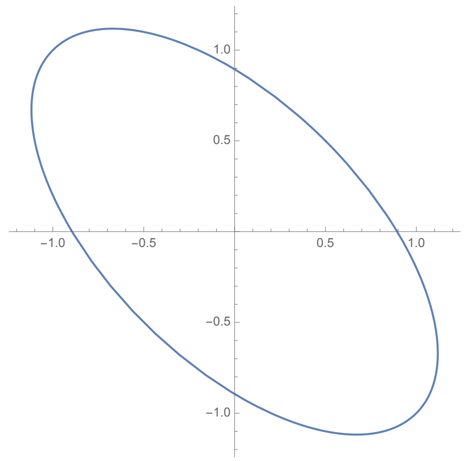


Figure 2: Il sostegno di $(\gamma, I)$.

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) \\ 2z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \nabla F\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{2}{3}\pi\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi $P$ è un punto regolare per $\Sigma$, e l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ in $P$ è data da

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(y - \frac{2}{3}\pi\right) + \sqrt{2}\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0\,.$$

*ii) calcolare il volume del solido*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 \leq \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)\,,\, 0 \leq y \leq \pi\,,\, x + z \geq 0\right\}$$

Si tratta del solido di rotazione della forma

$$\tilde{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \leq y \leq b\,,\, x^2 + z^2 \leq g^2(y)\right\}$$

dove $a = 0$, $b = \pi$ e $g(y) = \sin\left(\frac{y}{2}\right)$ (osserviamo infatti che $g(y) \geq 0$ per ogni $y \in [0, \pi]$), intersecato con il semispazio

$$\{x + z \geq 0\}\ .$$

Si ottiene il solido nella figura 3.

Se ci accorgiamo che il piano $x + z = 0$ taglia il solido di rotazione $\tilde{V}$ in due metà uguali, possiamo applicare la formula per il calcolo dei volumi dei solidi di rotazione, e ottenere

$$\text{Volume}(V) = \frac{1}{2}\,\text{Volume}(\tilde{V}) = \frac{1}{2}\int_a^b \pi g^2(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^\pi \pi\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)\,dy =$$

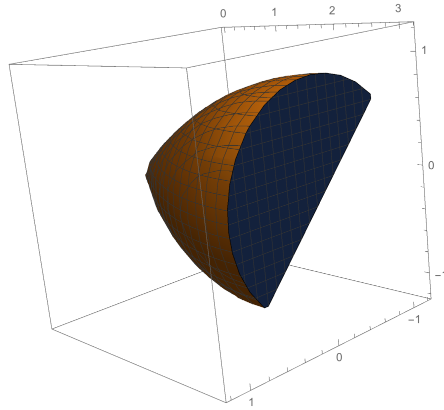


Figure 3: Il solido $V$.

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\, dt = \pi \left( \frac{t - \sin t\, \cos t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Se non ci accorgiamo della relazione tra $V$ e $\tilde{V}$, possiamo comunque procedere integrando per strati, usando la formula

$$\text{Volume}(V) = \iiint_V 1\, dxdydz = \int_0^{\pi} \left( \iint_{V_y} 1\, dxdz \right) dy$$

dove per ogni $y \in [0, \pi]$

$$V_y = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + z^2 \leq \sin^2\left(\frac{y}{2}\right) \,,\, x + z \geq 0 \right\}\,.$$

Svolgendo quindi prima l'integrale su $V_y$ usando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\, \cos\theta \\ z = \rho\, \sin\theta \end{cases} \qquad \text{con } (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [-\pi, \pi]\,,$$

otteniamo

$$\iint_{V_y} 1\, dxdz = \iint_{S_y} 1\, \rho\, d\rho d\theta$$

dove

$$S_y = \left\{ (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \,:\, 0 < \rho \leq \sin\left(\frac{y}{2}\right) \,,\, \rho(\cos\theta + \sin\theta) \geq 0 \right\} =$$
$$= \left\{ 0 < \rho \leq \sin\left(\frac{y}{2}\right) \,,\, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi \right\}\,.$$

Quindi

$$\iint_{V_y} 1\, dxdz = \iint_{S_y} 1\, \rho\, d\rho d\theta = \int_0^{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \left( \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho\, d\theta \right) d\rho = \pi \int_0^{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \rho\, d\rho = \frac{\pi}{2} \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)\,.$$

Tornando allora al calcolo del volume di $V$ troviamo

$$\text{Volume}(V) = \int_0^{\pi} \left( \iint_{V_y} 1\, dxdz \right) dy = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin^2\left(\frac{y}{2}\right) dy = \frac{\pi^2}{4}$$

come sopra.

**Analisi Matematica II**
**Corso di Ingegneria Gestionale**
**Compito B del 11-06-2015**

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

**Esercizio 1. (13 punti)** Data la funzione

$$f(x,y) = \log\left(1 + \sqrt{x^2 + 2y^2}\right)$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} ;$$

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + 2y^2 \leq 1 \, , \quad y - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0\right\} .$$

**Esercizio 2. (9 punti)** Data la curva $(\gamma, I)$, con $I = [-\frac{3}{8}, \frac{1}{8}]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[-\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right] \to \mathbb{R}^2 , \qquad \gamma(t) = \Big(\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t) \, , \, \cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (1\,,\,1)$;

ii) calcolare il lavoro lungo la curva $(\gamma, I)$ del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2} \\ \frac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2} \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3. (10 punti)** Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y^2 + z^2 = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \, , \, 0 \leq x \leq 2\pi\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P = \left(\frac{2}{3}\pi \, , \, \frac{1}{2} \, , \, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y^2 + z^2 \leq \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \, , \, 0 \leq x \leq 2\pi \, , \, y + z \leq 0\right\}$$

**Svolgimento**

**Esercizio 1.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log\left(1+\sqrt{x^2+2y^2}\right)$$

*i) dire se esiste il limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}\,;$$

Poniamo $g(x,y) = \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}$. Il dominio della funzione $g$ è $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, e $(0,0)$ è quindi punto di accumulazione per $D$, dunque ha senso chiedere l'esistenza del limite.

Consideriamo innanzitutto le possibili direzioni di avvicinamento al punto costituite da rette della forma $\{y=\lambda x\}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sqrt{x^2(1+2\lambda^2)})}{(x^2(1+\lambda^2))^{\frac{1}{4}}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{|x|}\,(1+\lambda^2)^{\frac{1}{4}}} = 0\,,$$

dove abbiamo usato $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$.

Dunque se il limite esiste è uguale a 0. Proviamo a dimostrarne l'esistenza, usando nuovamente che

$$\log\left(1+\sqrt{x^2+2y^2}\right) \sim \sqrt{x^2+2y^2} \qquad \text{per } (x,y)\to(0,0)\,.$$

Scriviamo quindi

$$0 \le \left|\frac{\sqrt{x^2+2y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}\right| \le \frac{\sqrt{2x^2+2y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{2}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}$$

e poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}} = 0$, essendo composizione di funzioni continue, il limite esiste ed è uguale a 0.

*ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su*

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+2y^2 \le 1\,, \quad y - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \ge 0\right\}.$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 4.

Per studiare massimo e minimo assoluto di $f$ su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$ ed eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione $f$ è certamente differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, dove si scrive come composizione di funzioni differenziabili (la funzione $t \mapsto \sqrt{t}$ non è differenziabile in $t=0$). L'origine

$$P = (0,0) \in \Omega$$

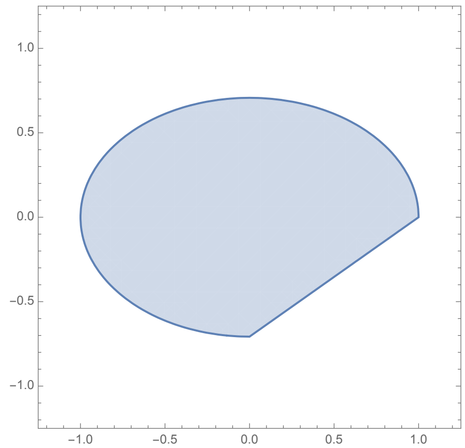


Figure 4: L'insieme $\bar{\Omega}$.

e quindi è un primo punto da considerare (si verifica che in effetti la funzione non è differenziabile nell'origine, ma accertarlo non è espressamente richiesto dall'esercizio).

Passiamo quindi alla ricerca dei punti critici liberi, che sono soluzioni del sistema in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{x}{(1+\sqrt{x^2+2y^2})\sqrt{x^2+2y^2}} = 0 \\ \frac{2y}{(1+\sqrt{x^2+2y^2})\sqrt{x^2+2y^2}} = 0 \end{cases}$$

Nell'insieme da considerare non ci sono soluzioni del sistema, e dunque non ci sono punti critici liberi.

Ci rimane da studiare il comportamento di $f$ sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ x^2 + 2y^2 = 1\,,\; y - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ y - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0\,,\; 0 \leq x \leq 1 \right\}.$$

Per quanto riguarda $\Gamma_1$, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right],$$

e componendo con $f$ troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log(2)\,, \qquad t \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right].$$

Essendo la funzione $g_1$ costante, tutti i punti sono critici, e il valore che assume la funzione è uguale a quello che assume sugli spigoli $S_1$ ed $S_2$. Quindi non consideriamo altri punti su $\Gamma_1$. (Si poteva anche osservare subito che la funzione $f$ è costante su $\Gamma_1$ e vale $f(S_1) = f(S_2)$.)

Passiamo a $\Gamma_2$, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\,t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con $f$ e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log\left(1 + \sqrt{2t^2 - 2t + 1}\right), \qquad t \in [0,1]$$

Abbiamo $g_2'(t) = \frac{2t-1}{(1+\sqrt{2t^2-2t+1})\sqrt{2t^2-2t+1}}$, dunque l'unico punto critico è $t_0 = \frac{1}{2} \in (0,1)$. Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q = \gamma_2\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = 0\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = \log(2)\,, \quad f(Q) = \log\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

e poiché $1 + \sqrt{\frac{1}{2}} < 2$, il massimo di $f$ è $\log(2)$ e il minimo è 0.

**Esercizio 2.** *Data la curva $(\gamma, I)$, con $I = [-\frac{3}{8}, \frac{1}{8}]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[-\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)\,,\, \cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t)\right)$$

*i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (1\,,\,1)$;*

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe $C^1$, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in I$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = (1\,,\,1)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in \left[-\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right]$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \cos(2\pi t_0) - \sin(2\pi t_0) = 1 \\ \cos^2(2\pi t_0) - \sin^2(2\pi t_0) = 1 \end{cases}$$

Sostituiamo la prima nella seconda, e poi sommiamo e sottraiamo le due equazioni

$$\begin{cases} \cos(2\pi t_0) - \sin(2\pi t_0) = 1 \\ \cos(2\pi t_0) + \sin(2\pi t_0) = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \cos(2\pi t_0) = 1 \\ \sin(2\pi t_0) = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che l'unica soluzione è $t_0 = 0$. La retta tangente al sostegno nel punto $P$ è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -2\pi \sin(2\pi t_0) - 2\pi \cos(2\pi t_0) \\ -8\pi \cos(2\pi t_0)\sin(2\pi t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto $P$ è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$y - 1 = 0\,.$$

*ii) calcolare il lavoro lungo la curva $(\gamma, I)$ del campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2} \\ \frac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) =$$

$$= \frac{x^2+(y-1)^2-2(x+y-1)x}{(x^2+(y-1)^2)^2} - \frac{-x^2-(y-1)^2-2(x-y+1)(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)^2} = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Essendo il suo dominio non semplicemente connesso, dobbiamo calcolare il lavoro per una curva chiusa che vada intorno al punto $(0,1)$.

Prima di chiederci se il campo è conservativo, studiamo le proprietà della curva $(\gamma, I)$. La curva verifica $\gamma(-\frac{3}{8}) = \gamma(\frac{1}{8}) = (0,0)$, quindi è chiusa, e chiediamoci se possiamo applicare il Teorema del Rotore. L'ipotesi fondamentale che dobbiamo verificare è che l'insieme $U$ racchiuso dalla curva sia tutto contenuto nel dominio del campo, ossia che $(0,1) \notin U$. Di questo ci convinciamo disegnando il sostegno di $(\gamma, I)$ (vedi figura 5).

Possiamo quindi applicare il Teorema del Rotore e otteniamo

$$L(\mathbf{F},\gamma) = \iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)\,dxdy = \iint_U 0\,dxdy = 0\,.$$

**Esercizio 3.** *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\,,\, 0 \le x \le 2\pi\right\}$$

*i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P = \left(\frac{2}{3}\pi\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;*

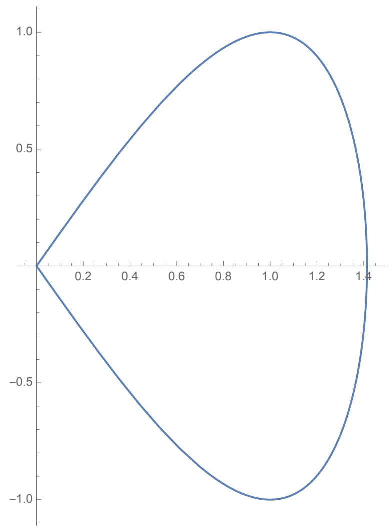


Figure 5: Il sostegno di $(\gamma, I)$.

La superficie $\Sigma$ è scritta come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = y^2 + z^2 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \nabla F\left(\frac{2}{3}\pi\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi $P$ è un punto regolare per $\Sigma$, e l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ in $P$ è data da

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0\,.$$

*ii) calcolare il volume del solido*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 \leq \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\,,\, 0 \leq x \leq 2\pi\,,\, y + z \leq 0\right\}$$

Si tratta del solido di rotazione della forma

$$\tilde{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \leq x \leq b\,,\, y^2 + z^2 \leq g^2(x)\right\}$$

dove $a = 0$, $b = 2\pi$ e $g(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ (osserviamo infatti che $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, 2\pi]$), intersecato con il semispazio

$$\{y + z \leq 0\}\ .$$

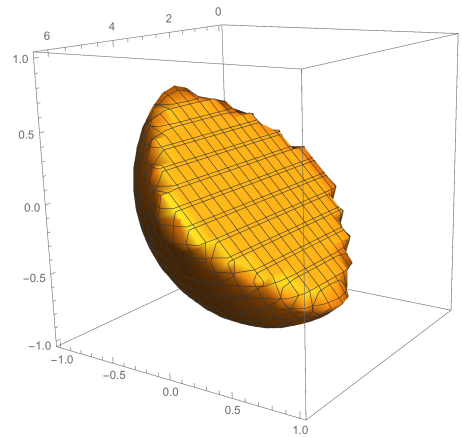


Figure 6: Il solido $V$.

Si ottiene il solido nella figura 6.

Se ci accorgiamo che il piano $y + z = 0$ taglia il solido di rotazione $\tilde{V}$ in due metà uguali, possiamo applicare la formula per il calcolo dei volumi dei solidi di rotazione, e ottenere

$$\text{Volume}(V) = \frac{1}{2}\,\text{Volume}(\tilde{V}) = \frac{1}{2}\int_a^b \pi g^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \pi \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \sin^2(t)\,dt = \pi\left(\frac{t - \sin t\,\cos t}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}\,.$$

Se non ci accorgiamo della relazione tra $V$ e $\tilde{V}$, possiamo comunque procedere integrando per strati, usando la formula

$$\text{Volume}(V) = \iiint_V 1\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\left(\iint_{V_x} 1\,dydz\right)\,dx$$

dove per ogni $x \in [0, 2\pi]$

$$V_x = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 + z^2 \le \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\,,\, y + z \le 0\right\}\,.$$

Svolgendo quindi prima l'integrale su $V_y$ usando le coordinate polari

$$\begin{cases} y = \rho\,\cos\theta \\ z = \rho\,\sin\theta \end{cases} \qquad \text{con } (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi]\,,$$

otteniamo

$$\iint_{V_x} 1\,dydz = \iint_{S_x} 1\,\rho\,d\rho d\theta$$

dove

$$S_x = \left\{(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi] \,:\, 0 < \rho \le \sin\left(\frac{x}{2}\right)\,,\, \rho(\cos\theta + \sin\theta) \le 0\right\} =$$

$$= \left\{0 < \rho \le \sin\left(\frac{x}{2}\right)\,,\, \frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{7}{4}\pi\right\}\,.$$

Quindi

$$\iint_{V_x} 1\, dydz = \iint_{S_x} 1\, \rho\, d\rho d\theta = \int_0^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left( \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \rho\, d\theta \right) d\rho = \pi \int_0^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \rho\, d\rho = \frac{\pi}{2} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) .$$

Tornando allora al calcolo del volume di $V$ troviamo

$$\text{Volume}(V) = \int_0^{2\pi} \left( \iint_{V_x} 1\, dydz \right) dx = \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{\pi^2}{2}$$

come sopra.

**Analisi Matematica II**
**Corso di Ingegneria Gestionale**
**Compito C del 11-06-2015**

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

**Esercizio 1. (13 punti)** Data la funzione

$$f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(2x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} \, ;$$

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \le 1 \, , \quad y - x + 1 \ge 0\right\} \, .$$

**Esercizio 2. (9 punti)** Data la curva $(\gamma, I)$, con $I = [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \to \mathbb{R}^2 \, , \qquad \gamma(t) = \Big(\cos(\pi t) - \sin(\pi t)\, , \, \cos^2(\pi t) - \sin^2(\pi t)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (1\, ,\, 1)$;

ii) calcolare il lavoro lungo la curva $(\gamma, I)$ del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2} \\ \frac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2} \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3. (10 punti)** Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y^2 + z^2 = e^{2x} - 1 \, , \, 0 \le x \le 3\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P = \left(\frac{1}{2}\log_e 2 \, , \, \frac{\sqrt{2}}{2} \, , \, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y^2 + z^2 \le e^{2x} - 1 \, , \, 0 \le x \le 3 \, , \, y + z \le 0\right\}$$

**Svolgimento**

**Esercizio 1.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1$$

*i) dire se esiste il limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(2x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}};$$

Poniamo $g(x,y) = \frac{f(x,y)}{(2x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}$. Il dominio della funzione $g$ è $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, e $(0,0)$ è quindi punto di accumulazione per $D$, dunque ha senso chiedere l'esistenza del limite.

Consideriamo innanzitutto le possibili direzioni di avvicinamento al punto costituite da rette della forma $\{y = \lambda x\}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(2x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x^2(1+\lambda^2)}} - 1}{(x^2(2+\lambda^2))^{\frac{1}{4}}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{1+\lambda^2} + o(|x|)}{\sqrt{|x|}\,(2+\lambda^2)^{\frac{1}{4}}} = 0\,,$$

dove abbiamo usato $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$.

Dunque se il limite esiste è uguale a 0. Proviamo a dimostrarne l'esistenza, usando nuovamente che

$$e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \sim \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{per } (x,y) \to (0,0)\,.$$

Scriviamo quindi

$$0 \le \left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(2x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}\right| \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}$$

e poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}} = 0$, essendo composizione di funzioni continue, il limite esiste ed è uguale a 0.

*ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su*

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,, \quad y - x + 1 \ge 0\right\}\,.$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 7.

Per studiare massimo e minimo assoluto di $f$ su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$ ed eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione $f$ è certamente differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, dove si scrive come composizione di funzioni differenziabili (la funzione $t \mapsto \sqrt{t}$ non è differenziabile in $t = 0$). L'origine

$$P = (0,0) \in \Omega$$

e quindi è un primo punto da considerare (si verifica che in effetti la funzione non è differenziabile nell'origine, ma accertarlo non è espressamente richiesto dall'esercizio).

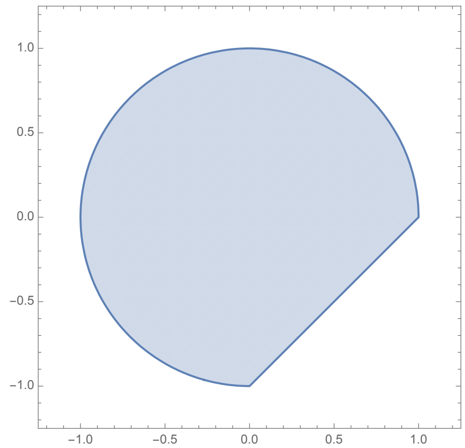


Figure 7: L'insieme $\bar{\Omega}$.

Passiamo quindi alla ricerca dei punti critici liberi, che sono soluzioni del sistema in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}}\, e^{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+2y^2}}\, e^{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$

Nell'insieme da considerare non ci sono soluzioni del sistema, e dunque non ci sono punti critici liberi.

Ci rimane da studiare il comportamento di $f$ sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{x^2 + y^2 = 1\,,\; y - x + 1 \geq 0\right\}$$

$$\Gamma_2 = \{y - x + 1 = 0\,,\; 0 \leq x \leq 1\} .$$

Per quanto riguarda $\Gamma_1$, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right] ,$$

e componendo con $f$ troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = e - 1\,, \qquad t \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right] .$$

Essendo la funzione $g_1$ costante, tutti i punti sono critici, e il valore che assume la funzione è uguale a quello che assume sugli spigoli $S_1$ ed $S_2$. Quindi non consideriamo altri punti su $\Gamma_1$. (Si poteva anche osservare subito che la funzione $f$ è costante su $\Gamma_1$ e vale $f(S_1) = f(S_2)$.)

Passiamo a $\Gamma_2$, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con $f$ e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = e^{\sqrt{2t^2-2t+1}} - 1\,, \qquad t \in [0,1]$$

Abbiamo $g_2'(t) = \frac{2t-1}{\sqrt{2t^2-2t+1}} e^{\sqrt{2t^2-2t+1}}$, dunque l'unico punto critico è $t_0 = \frac{1}{2} \in (0,1)$. Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q = \gamma_2\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = 0\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = e - 1\,, \quad f(Q) = e^{\sqrt{\frac{1}{2}}} - 1\,,$$

e poiché $0 < \sqrt{\frac{1}{2}} < 1$ e la funzione esponenziale è crescente, il massimo di $f$ è $e-1$ e il minimo è 0.

**Esercizio 2.** *Data la curva $(\gamma, I)$, con $I = [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\cos(\pi t) - \sin(\pi t)\,,\, \cos^2(\pi t) - \sin^2(\pi t)\Big)$$

*i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (1\,,\,1)$;*

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe $C^1$, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in I$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = (1\,,\,1)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \cos(\pi t_0) - \sin(\pi t_0) = 1 \\ \cos^2(\pi t_0) - \sin^2(\pi t_0) = 1 \end{cases}$$

Sostituiamo la prima nella seconda, e poi sommiamo e sottraiamo le due equazioni

$$\begin{cases} \cos(\pi t_0) - \sin(\pi t_0) = 1 \\ \cos(\pi t_0) + \sin(\pi t_0) = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \cos(\pi t_0) = 1 \\ \sin(\pi t_0) = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che l'unica soluzione è $t_0 = 0$. La retta tangente al sostegno nel punto $P$ è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -\pi\sin(\pi t_0) - \pi\cos(\pi t_0) \\ -4\pi\cos(\pi t_0)\sin(\pi t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto $P$ è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$y - 1 = 0\,.$$

*ii) calcolare il lavoro lungo la curva $(\gamma, I)$ del campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2} \\ \frac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) =$$

$$= \frac{x^2 + (y-1)^2 - 2(x+y-1)x}{(x^2+(y-1)^2)^2} - \frac{-x^2 - (y-1)^2 - 2(x-y+1)(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)^2} = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Essendo il suo dominio non semplicemente connesso, dobbiamo calcolare il lavoro per una curva chiusa che vada intorno al punto $(0,1)$.

Prima di chiederci se il campo è conservativo, studiamo le proprietà della curva $(\gamma, I)$. La curva verifica

$$\gamma\left(-\frac{1}{4}\right) = (\sqrt{2}, 0)\,, \qquad \gamma\left(\frac{3}{4}\right) = (-\sqrt{2}, 0)$$

e il suo sostegno è disegnato nella figura 8.

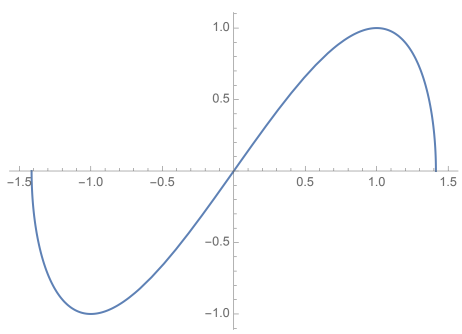


Figure 8: Il sostegno di $(\gamma, I)$.

Pur non sapendo se il campo è conservativo, possiamo restringerlo ad un dominio $\Omega' \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ semplicemente connesso, e che contenga il sostegno della curva. Ai fini dell'esercizio, possiamo quindi trattare il campo $\mathbf{F}$ come se fosse conservativo, e calcolare il suo lavoro lungo $(\gamma, I)$ scegliendo un'altra curva $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$ con gli stessi punti iniziale e finale. In particolare possiamo scegliere

$$\tilde{\gamma} : \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \Big(-t\,,\,0\Big)$$

Quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} < \mathbf{F}(\tilde{\gamma}(t)), \tilde{\gamma}'(t) > \, dt = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} < \begin{pmatrix} \frac{-t+1}{t^2+1} \\ \frac{-t-1}{t^2+1} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} > \, dt =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t-1}{t^2+1} \, dt = \left( \frac{1}{2} \log(t^2+1) - \arctan t \right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = -2 \arctan \sqrt{2} \, .$$

**Esercizio 3.** *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y^2 + z^2 = e^{2x} - 1 \, , \, 0 \leq x \leq 3 \right\}$$

*i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a* $\Sigma$ *nel punto* $P = \left( \frac{1}{2} \log_e 2 \, , \, \frac{\sqrt{2}}{2} \, , \, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$*;*

La superficie $\Sigma$ è scritta come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = y^2 + z^2 - e^{2x}$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2e^{2x} \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \nabla F \left( \frac{1}{2} \log_e 2 \, , \, \frac{\sqrt{2}}{2} \, , \, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi $P$ è un punto regolare per $\Sigma$, e l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ in $P$ è data da

$$-4 \left( x - \frac{1}{2} \log_e 2 \right) + \sqrt{2} \left( y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \sqrt{2} \left( z - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0 \, .$$

*ii) calcolare il volume del solido*

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y^2 + z^2 \leq e^{2x} - 1 \, , \, 0 \leq x \leq 3 \, , \, y + z \leq 0 \right\}$$

Si tratta del solido di rotazione della forma

$$\tilde{V} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, a \leq x \leq b \, , \, y^2 + z^2 \leq g^2(x) \right\}$$

dove $a = 0$, $b = 3$ e $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$ (osserviamo infatti che $e^{2x} - 1 \geq 0$ per ogni $x \in [0,3]$), intersecato con il semispazio

$$\{ y + z \leq 0 \} \, .$$

Si ottiene il solido nella figura 9.

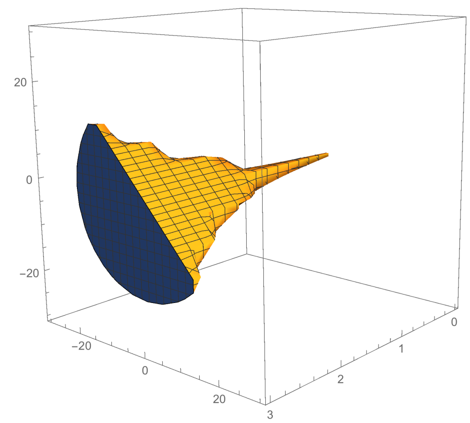


Figure 9: Il solido $V$.

Se ci accorgiamo che il piano $y + z = 0$ taglia il solido di rotazione $\tilde{V}$ in due metà uguali, possiamo applicare la formula per il calcolo dei volumi dei solidi di rotazione, e ottenere

$$\text{Volume}(V) = \frac{1}{2}\,\text{Volume}(\tilde{V}) = \frac{1}{2}\int_a^b \pi g^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \pi(e^{2x} - 1)\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x} - x\right)\Big|_0^3 = \frac{\pi}{4}\,(e^6 - 7)\,.$$

Se non ci accorgiamo della relazione tra $V$ e $\tilde{V}$, possiamo comunque procedere integrando per strati, usando la formula

$$\text{Volume}(V) = \iiint_V 1\,dxdydz = \int_0^3 \left(\iint_{V_x} 1\,dydz\right) dx$$

dove per ogni $x \in [0, 3]$

$$V_x = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 + z^2 \le e^{2x} - 1\,,\; y + z \le 0\right\}\,.$$

Svolgendo quindi prima l'integrale su $V_x$ usando le coordinate polari

$$\begin{cases} y = \rho\,\cos\theta \\ z = \rho\,\sin\theta \end{cases} \qquad \text{con } (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi]\,,$$

otteniamo

$$\iint_{V_x} 1\,dydz = \iint_{S_x} 1\,\rho\,d\rho d\theta$$

dove

$$S_x = \left\{(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi] \,:\, 0 < \rho \le \sqrt{e^{2x} - 1}\,,\; \rho(\cos\theta + \sin\theta) \le 0\right\} =$$

$$= \left\{0 < \rho \le \sqrt{e^{2x} - 1}\,,\; \frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{7}{4}\pi\right\}\,.$$

Quindi

$$\iint_{V_x} 1\, dydz = \iint_{S_x} 1\, \rho\, d\rho d\theta = \int_0^{\sqrt{e^{2x}-1}} \left( \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \rho\, d\theta \right) d\rho = \pi \int_0^{\sqrt{e^{2x}-1}} \rho\, d\rho = \frac{\pi}{2}\left(e^{2x}-1\right).$$

Tornando allora al calcolo del volume di $V$ troviamo

$$\text{Volume}(V) = \int_0^3 \left( \iint_{V_x} 1\, dydz \right) dx = \int_0^3 \frac{\pi}{2}\left(e^{2x}-1\right) dx = \frac{\pi}{4}\left(e^6 - 7\right)$$

come sopra.

**Analisi Matematica II**
**Corso di Ingegneria Gestionale**
**Compito D del 11-06-2015**

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

**Esercizio 1. (13 punti)** Data la funzione

$$f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{2x^2+y^2}}\,;$$

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\,, \quad y+x+1 \geq 0\right\}\,.$$

**Esercizio 2. (9 punti)** Data la curva $(\gamma, I)$, con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\cos t - \frac{1}{2}\sin t\,,\, \cos t + \frac{1}{2}\sin t\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\,,\, \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$;

ii) calcolare il lavoro lungo la curva $(\gamma, I)$ del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y+2}{(x+1)^2+(y-1)^2} \\ \frac{x+y}{(x+1)^2+(y-1)^2} \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3. (10 punti)** Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+z^2 = e^{2y}-1\,,\, 0 \leq y \leq 2\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\, \frac{1}{2}\log_e 2\,,\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+z^2 \leq e^{2y}-1\,,\, 0 \leq y \leq 2\,,\, x+z \geq 0\right\}$$

## Svolgimento

**Esercizio 1.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1$$

*i) dire se esiste il limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{2x^2+y^2}}\,;$$

Poniamo $g(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{2x^2+y^2}}$. Il dominio della funzione $g$ è $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, e $(0,0)$ è quindi punto di accumulazione per $D$, dunque ha senso chiedere l'esistenza del limite.

Consideriamo innanzitutto le possibili direzioni di avvicinamento al punto costituite da rette della forma $\{y = \lambda x\}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{2x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x^2(1+\lambda^2)}} - 1}{\sqrt{x^2(2+\lambda^2)}} = \sqrt{\frac{1+\lambda^2}{2+\lambda^2}}\,,$$

dove abbiamo usato $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$.

Poiché il valore del limite dipende da $\lambda \in \mathbb{R}$, il limite non esiste.

*ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su*

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,, \quad y+x+1 \ge 0\right\}\,.$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 10.

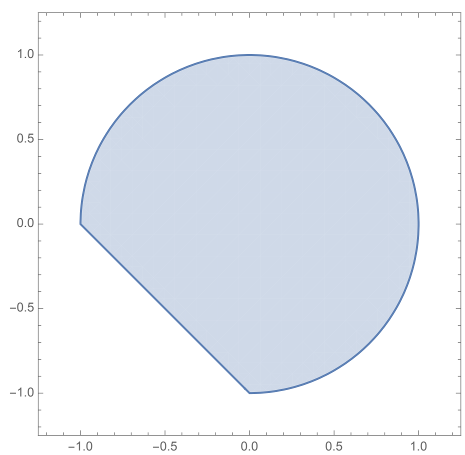


Figure 10: L'insieme $\bar{\Omega}$.

Per studiare massimo e minimo assoluto di $f$ su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$ ed eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione $f$ è certamente differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, dove si scrive come composizione di funzioni differenziabili (la funzione $t \mapsto \sqrt{t}$ non è differenziabile in $t=0$). L'origine

$$P = (0,0) \in \Omega$$

e quindi è un primo punto da considerare (si verifica che in effetti la funzione non è differenziabile nell'origine, ma accertarlo non è espressamente richiesto dall'esercizio).

Passiamo quindi alla ricerca dei punti critici liberi, che sono soluzioni del sistema in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}}\, e^{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+2y^2}}\, e^{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$

Nell'insieme da considerare non ci sono soluzioni del sistema, e dunque non ci sono punti critici liberi.

Ci rimane da studiare il comportamento di $f$ sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{x^2 + y^2 = 1\,,\; y + x + 1 \geq 0\right\}$$

$$\Gamma_2 = \{y + x + 1 = 0\,,\; -1 \leq x \leq 0\}\;.$$

Per quanto riguarda $\Gamma_1$, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

e componendo con $f$ troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = e - 1\,, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Essendo la funzione $g_1$ costante, tutti i punti sono critici, e il valore che assume la funzione è uguale a quello che assume sugli spigoli $S_1$ ed $S_2$. Quindi non consideriamo altri punti su $\Gamma_1$. (Si poteva anche osservare subito che la funzione $f$ è costante su $\Gamma_1$ e vale $f(S_1) = f(S_2)$.)

Passiamo a $\Gamma_2$, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ -t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con $f$ e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = e^{\sqrt{2t^2-2t+1}} - 1\,, \qquad t \in [0,1]$$

Abbiamo $g_2'(t) = \frac{2t-1}{\sqrt{2t^2-2t+1}} e^{\sqrt{2t^2-2t+1}}$, dunque l'unico punto critico è $t_0 = \frac{1}{2} \in (0,1)$. Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q = \gamma_2\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = 0\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = e - 1\,, \quad f(Q) = e^{\sqrt{\frac{1}{2}}} - 1\,,$$

e poiché $0 < \sqrt{\frac{1}{2}} < 1$ e la funzione esponenziale è crescente, il massimo di $f$ è $e-1$ e il minimo è 0.

**Esercizio 2.** *Data la curva $(\gamma, I)$, con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\cos t - \frac{1}{2}\sin t\,,\, \cos t + \frac{1}{2}\sin t\Big)$$

*i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\,,\, \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$;*

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe $C^1$, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in I$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\,,\, \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in [0, 2\pi]$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \cos t_0 - \frac{1}{2}\sin t_0 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ \cos t_0 + \frac{1}{2}\sin t_0 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Sommando e sottraendo le due equazioni troviamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \cos t_0 = \frac{1}{2} \\ \sin t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

da cui si ricava che l'unica soluzione è $t_0 = \frac{\pi}{3}$. La retta tangente al sostegno nel punto $P$ è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -\sin(t_0) - \frac{1}{2}\cos(t_0) \\ -\sin(t_0) + \frac{1}{2}\cos(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1-2\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1-2\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto $P$ è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1-2\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1+2\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\frac{1-2\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1+2\sqrt{3}}{4}\left(y - \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = 0\,.$$

*ii) calcolare il lavoro lungo la curva $(\gamma, I)$ del campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y+2}{(x+1)^2+(y-1)^2} \\ \frac{x+y}{(x+1)^2+(y-1)^2} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,1)\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) =$$

$$= \frac{(x+1)^2 + (y-1)^2 - 2(x+y)(x+1)}{((x+1)^2 + (y-1)^2)^2} - \frac{-(x+1)^2 - (y-1)^2 - 2(x-y+2)(y-1)}{((x+1)^2 + (y-1)^2)^2} = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Essendo il suo dominio non semplicemente connesso, dobbiamo calcolare il lavoro per una curva chiusa che vada intorno al punto $(-1,1)$.

Prima di chiederci se il campo è conservativo, studiamo le proprietà della curva $(\gamma, I)$. La curva verifica $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, quindi è chiusa, e chiediamoci se possiamo applicare il Teorema del Rotore. L'ipotesi fondamentale che dobbiamo verificare è che l'insieme $U$ racchiuso dalla curva sia tutto contenuto nel dominio del campo, ossia che $(-1,1) \notin U$. Di questo ci convinciamo disegnando il sostegno di $(\gamma, I)$ (vedi figura 11).

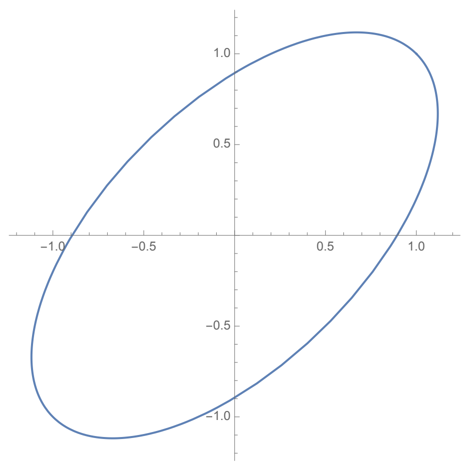


Figure 11: Il sostegno di $(\gamma, I)$.

Possiamo quindi applicare il Teorema del Rotore e otteniamo

$$L(\mathbf{F},\gamma) = \iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)\,dxdy = \iint_U 0\,dxdy = 0\,.$$

**Esercizio 3.** *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 = e^{2y} - 1\,,\, 0 \le y \le 2\right\}$$

*i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\, \frac{1}{2}\log_e 2\,,\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;*

La superficie $\Sigma$ è scritta come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = x^2 + z^2 - e^{2y}$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2e^{2y} \\ 2z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \nabla F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{1}{2}\log_e 2\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi $P$ è un punto regolare per $\Sigma$, e l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ in $P$ è data da

$$\sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 4\left(y - \frac{1}{2}\log_e 2\right) + \sqrt{2}\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0\,.$$

*ii) calcolare il volume del solido*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 \leq e^{2y} - 1\,,\, 0 \leq y \leq 2\,,\, x + z \geq 0\right\}$$

Si tratta del solido di rotazione della forma

$$\tilde{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \leq y \leq b\,,\, x^2 + z^2 \leq g^2(y)\right\}$$

dove $a = 0$, $b = 2$ e $g(y) = \sqrt{e^{2y} - 1}$ (osserviamo infatti che $e^{2y} - 1 \geq 0$ per ogni $y \in [0,2]$), intersecato con il semispazio

$$\{x + z \geq 0\}\ .$$

Si ottiene il solido nella figura 12.

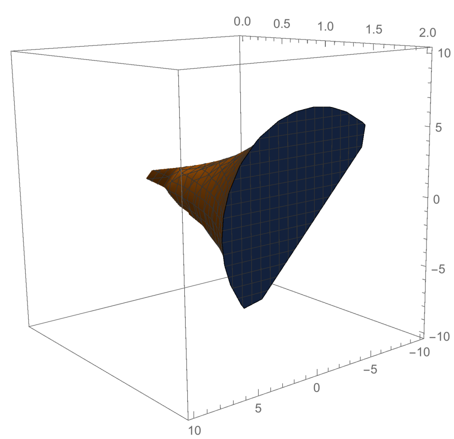


Figure 12: Il solido $V$.

Se ci accorgiamo che il piano $x + z = 0$ taglia il solido di rotazione $\tilde{V}$ in due metà uguali, possiamo applicare la formula per il calcolo dei volumi dei solidi di rotazione, e ottenere

$$\text{Volume}(V) = \frac{1}{2}\,\text{Volume}(\tilde{V}) = \frac{1}{2}\int_a^b \pi g^2(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^2 \pi(e^{2y} - 1)\,dy =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} e^{2y} - y \right) \Big|_0^2 = \frac{\pi}{4} \left( e^4 - 5 \right) .$$

Se non ci accorgiamo della relazione tra $V$ e $\tilde{V}$, possiamo comunque procedere integrando per strati, usando la formula

$$\text{Volume}(V) = \iiint_V 1 \, dxdydz = \int_0^2 \left( \iint_{V_y} 1 \, dxdz \right) dy$$

dove per ogni $y \in [0, 2]$

$$V_y = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + z^2 \leq e^{2y} - 1 \, , \, x + z \geq 0 \right\} \, .$$

Svolgendo quindi prima l'integrale su $V_y$ usando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta \end{cases} \qquad \text{con } (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \, ,$$

otteniamo

$$\iint_{V_y} 1 \, dxdz = \iint_{S_y} 1 \, \rho \, d\rho d\theta$$

dove

$$S_y = \left\{ (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \, : \, 0 < \rho \leq \sqrt{e^{2y} - 1} \, , \, \rho(\cos \theta + \sin \theta) \geq 0 \right\} =$$
$$= \left\{ 0 < \rho \leq \sqrt{e^{2y} - 1} \, , \, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4} \pi \right\} \, .$$

Quindi

$$\iint_{V_y} 1 \, dxdz = \iint_{S_y} 1 \, \rho \, d\rho d\theta = \int_0^{\sqrt{e^{2y}-1}} \left( \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho \, d\theta \right) d\rho = \pi \int_0^{\sqrt{e^{2y}-1}} \rho \, d\rho = \frac{\pi}{2} \left( e^{2y} - 1 \right) .$$

Tornando allora al calcolo del volume di $V$ troviamo

$$\text{Volume}(V) = \int_0^2 \left( \iint_{V_y} 1 \, dxdz \right) dy = \int_0^2 \frac{\pi}{2} \left( e^{2y} - 1 \right) dx = \frac{\pi}{4} \left( e^4 - 5 \right)$$

come sopra.