Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 11-06-2014

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-y)\,\log\left(1+\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}\right), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0\,, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del dominio è continua;

ii) dire se esiste la derivata direzionale di f nel punto $P=(0,0)$ nella direzione $v=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

iii) dire in quali punti del dominio è differenziabile.

Esercizio 2. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I=[0,\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t)=\Big(t\sin(t),\, t\cos(t)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P=\left(\frac{\pi}{2},\,0\right)$;

ii) considerando $\bar{\Omega}$ l'insieme di $\mathbb{R}^2$ delimitato dal sostegno di (γ, I) e dall'asse delle ordinate, determinare massimo e minimo su $\bar{\Omega}$ della funzione

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione

$$\sigma: D\to\mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(u,v)=\big(u+v\,,\,v^2\,,\,u^2+2uv\big)$$

definita sull'insieme

$$D=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le v\le 2\,,\, v\ge -u\,,\, v\ge\frac{1}{2}u\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P=(2,\ 1,\ 3)$;

ii) calcolare l'integrale di superficie $\iint_\Sigma x\,dS$.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x-y)\,\log\left(1+\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac14}}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\,, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i) dire in quali punti del dominio è continua;

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e al di fuori dell'origine è continua perché composizione di funzioni continue e differenziabili. Rimane quindi da studiarne il comportamento nell'origine.

Possiamo usare il limite $\lim_{t\to 0} t^2\log\left(1+\frac{1}{t}\right)=0$ e la disuguaglianza $|x|+|y|\leq\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$, scrivendo

$$0\leq|f(x,y)|\leq(|x|+|y|)\log\left(1+\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac14}}\right)\leq\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\log\left(1+\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac14}}\right)$$

e ponendo $t=(x^2+y^2)^{\frac14}$. Se ne deduce che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

e quindi la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

Si poteva anche procedere per coordinate polari, usando che

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\Big|\cos\theta-\sin\theta\Big|\leq 2\,,$$

e quindi

$$\lim_{\rho\to 0}\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|\rho\,(\cos\theta-\sin\theta)\log\left(1+\frac{1}{\rho^{\frac12}}\right)\right|=0.$$

ii) dire se esiste la derivata direzionale di f nel punto $P=(0,0)$ nella direzione $v=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

Bisogna verificare se esiste il limite

$$D_vf(0,0):=\lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t}$$

con $v_1=v_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Sostituendo nella funzione si trova

$$f(tv_1,tv_2)-f(0,0)=0$$

dunque il limite esiste ed è uguale a 0.

iii) dire in quali punti del dominio è differenziabile.

La funzione f è differenziabile su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ perché composizione di funzioni differenziabili. Rimane quindi da studiarne il comportamento nell'origine.

Per studiare la differenziabilità di f nell'origine applichiamo la definizione. Controlliamo quindi se esistono innanzitutto le derivate parziali nell'origine. Iniziamo con la derivata parziale rispetto a x. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t \log\left(1 + \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}}}\right)}{t} = +\infty$$

Dunque non esistendo almeno una derivata parziale, la funzione non può essere differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [0,\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t\sin(t),\, t\cos(t)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{\pi}{2},\, 0\right)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in I$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \left(\frac{\pi}{2},\, 0\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in [0,\pi]$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} t_0 \sin(t_0) = \frac{\pi}{2} \\ t_0 \cos(t_0) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda si ricava $t_0 \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$, e sostituendo nella prima si trova che l'unica soluzione è $t_0 = \frac{\pi}{2}$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \sin(t_0) + t_0\cos(t_0) \\ \cos(t_0) - t_0\sin(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + y = 0\,.$$

ii) considerando $\bar\Omega$ l'insieme di $\mathbb{R}^2$ delimitato dal sostegno di (γ, I) e dall'asse delle ordinate, determinare massimo e minimo su $\bar\Omega$ della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

L'insieme $\bar\Omega$ è quello raffigurato nella Figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar\Omega$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar\Omega$, sui

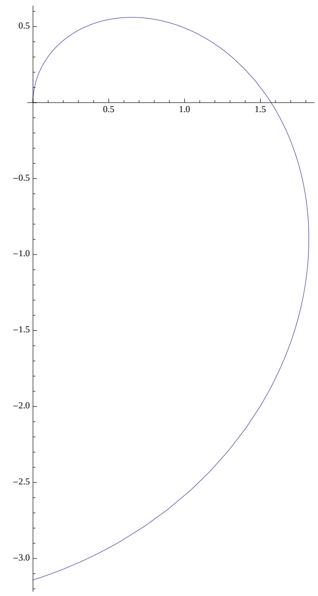

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$

punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f è non differenziabile in $(0,0)$ e si verifica che $(0,0) \in \partial\bar{\Omega}$, quindi

$$P = (0,0)$$

è un punto da tenere in considerazione. La funzione non ha punti critici liberi, non essendoci soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Passiamo allo studio di f sul bordo. Il bordo di $\bar{\Omega}$ ha due spigoli

$$Q_1 = (0,0) \quad \text{e} \quad Q_2 = (0, -\pi)$$

e consiste di due pezzi, il sostegno Γ di (γ, I) e il segmento $\Gamma_1 = \{x = 0, -\pi \leq y \leq 0\}$. Usiamo in entrambi i casi il metodo diretto. Per Γ usiamo la parametrizzazione $\gamma(t)$ del punto (i) e otteniamo la funzione di una variabile

$$g(t) = f(\gamma(t)) = |t|\,, \qquad t \in [0, \pi]$$

La funzione g non ha punti critici, e quindi ci interessano soltanto i punti di bordo

$$\gamma(0) = Q_1 \quad \text{e} \quad \gamma(\pi) = Q_2\,.$$

Passiamo a Γ_1. Usiamo la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (0,\, t)\ , \qquad t \in [-\pi, 0]$$

componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = |t|\,, \qquad t \in [-\pi, 0]$$

Di nuovo la funzione g_1 non ha punti critici, e quindi ci interessano soltanto i punti di bordo

$$\gamma_1(-\pi) = Q_2 \quad \text{e} \quad \gamma_1(0) = Q_1\,.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = f(Q_1) = f(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad f(Q_2) = f(0,-\pi) = \pi\,,$$

per cui il massimo di f è π e il minimo è 0.

Esercizio 3. *Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione*

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(u,v) = \big(u+v\,,\, v^2\,,\, u^2+2uv\big)$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le v \le 2\,,\, v \ge -u\,,\, v \ge \frac{1}{2}u\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (2,\ 1,\ 3)$;

Dobbiamo trovare il vettore normale a Σ nel punto P, che si ottiene come $P = \sigma(1,\ 1)$. Scriviamo quindi innanzitutto la matrice Jacobiana di σ da cui otteniamo il vettore normale come prodotto vettoriale tra le due colonne. Troviamo

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2v \\ 2(u+v) & 2u \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} -4v(u+v) \\ 2v \\ 2v \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi $\vec{n}\,(1,\ 1)$, che è

$$\vec{n}\,(1,\ 1) = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è

$$-8(x-2) + 2(y-1) + 2(z-3) = 0\,.$$

ii) calcolare l'integrale di superficie $\iint_\Sigma x\,dS$.

Applicando la formula per l'integrale di superficie, dobbiamo calcolare l'integrale

$$\iint_\Sigma x\,dS = \iint_D x(u,v) \|\vec{n}(u,v)\|\,dudv$$

Dal punto i) troviamo che

$$\|\vec{n}(u,v)\| = \sqrt{16v^2(u+v)^2 + 4v^2 + 4v^2} = 2\sqrt{2}\, v\sqrt{1+2(u+v)^2}$$

dove abbiamo usato che $v \geq 0$ su D.

L'insieme D è raffigurato nella figura 2, e si può scrivere come insieme semplice rispetto alla u nella forma

$$D = \{(u,v) \,:\, 0 \leq v \leq 2\,,\, -v \leq u \leq 2v\}$$

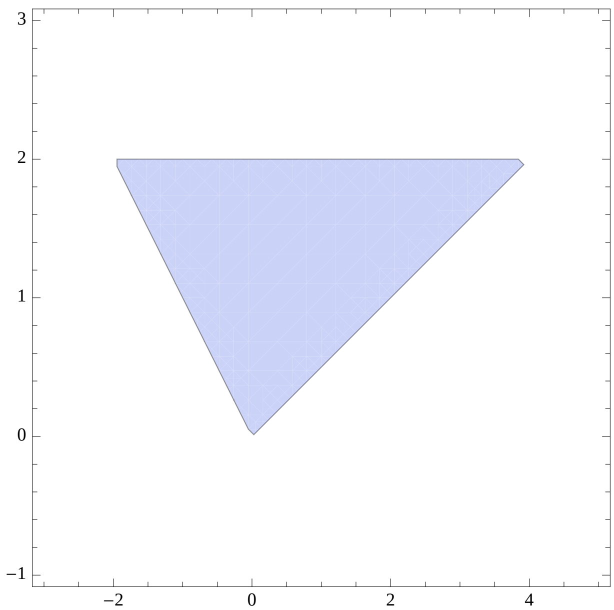

Figure 2: L'insieme D

Applichiamo quindi le formule di riduzione per insiemi semplici e otteniamo

$$\iint_\Sigma x\, dS = \iint_D x(u,v)\|\vec{n}(u,v)\|\, dudv = \iint_D 2\sqrt{2}\, v(u+v)\sqrt{1+2(u+v)^2}\, dudv =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^2 \left(\int_{-v}^{2v} v(u+v)\sqrt{1+2(u+v)^2}\, du\right) dv = 2\sqrt{2}\int_0^2 \left(\frac{v}{6}[1+2(u+v)^2]^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{-v}^{2v} dv =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^2 \left(v[1+18v^2]^{\frac{3}{2}} - v\right) dv = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{90}[1+18v^2]^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}v^2\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{270}\left(73^{\frac{5}{2}} - 181\right)$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 11-06-2014

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-y)^2 \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del dominio è continua;

ii) dire se esiste la derivata direzionale di f nel punto $P = (0,0)$ nella direzione $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

iii) dire in quali punti del dominio è differenziabile.

Esercizio 2. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0,\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t\cos(t),\, t\sin(t)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

ii) considerando $\bar{\Omega}$ l'insieme di $\mathbb{R}^2$ delimitato dal sostegno di (γ, I) e dall'asse delle ascisse, determinare massimo e minimo su $\bar{\Omega}$ della funzione

$$f(x,y) = \exp(x^2+y^2)$$

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(u,v) = \big(u+v\,,\, v^2\,,\, u^2+2uv\big)$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq v \leq 2\,,\, v \geq -u\,,\, v \geq \frac{1}{2}u\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (1,\ 1,\ 0)$;

ii) calcolare l'integrale di superficie $\iint_\Sigma x\,dS$.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-y)^2 \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del dominio è continua;

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e al di fuori dell'origine è continua perché composizione di funzioni continue e differenziabili. Rimane quindi da studiarne il comportamento nell'origine.

Possiamo usare il limite $\lim_{t\to 0} t^2 \log\left(1+\frac{1}{t}\right) = 0$ e la disuguaglianza $|x|+|y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$, scrivendo

$$0 \leq |f(x,y)| \leq (|x|+|y|)^2 \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \leq 2(x^2+y^2)\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

e ponendo $t = \sqrt{x^2+y^2}$. Se ne deduce che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

e quindi la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

Si poteva anche procedere per coordinate polari, usando che

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]} \left|\cos\theta - \sin\theta\right|^2 \leq 4\,,$$

e quindi

$$\lim_{\rho\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \left|\rho^2 (\cos\theta - \sin\theta)^2 \log\left(1+\frac{1}{\rho}\right)\right| = 0.$$

ii) dire se esiste la derivata direzionale di f nel punto $P=(0,0)$ nella direzione $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

Bisogna verificare se esiste il limite

$$D_v f(0,0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t}$$

con $v_1 = v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sostituendo nella funzione si trova

$$f(tv_1, tv_2) - f(0,0) = 0$$

dunque il limite esiste ed è uguale a 0.

iii) dire in quali punti del dominio è differenziabile.

La funzione f è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché composizione di funzioni differenziabili. Rimane quindi da studiarne il comportamento nell'origine.

Per studiare la differenziabilità di f nell'origine applichiamo la definizione. Controlliamo quindi se esistono innanzitutto le derivate parziali nell'origine. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\log(1+\frac{1}{|t|})}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\log(1+\frac{1}{|t|})}{t} = 0$$

A questo punto, se il differenziale di f in $(0,0)$ esiste, coincide con l'applicazione lineare rappresentata dal vettore $(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = (0,0)$. Quindi la f è differenziabile in $(0,0)$ se

$$\lim_{t\to 0} \sup_{\|v\|=1} \left| \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)-<(0,0),(tv_1,tv_2)>}{t} \right| = 0\,.$$

Sostituendo la funzione f e usando $|v_1-v_2|^2 \le 2$, si trova

$$\lim_{t\to 0} \sup_{\|v\|=1} \left| \frac{t^2(v_1-v_2)^2\log(1+\frac{1}{|t|})}{t} \right| \le \lim_{t\to 0} 2|t|\log(1+\frac{1}{|t|}) = 0\,.$$

Di conseguenza f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

Analogamente si poteva dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-<(0,0),(x,y)>}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Infatti come nel punto (i) si trova

$$0 \le \left| \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le 2\sqrt{x^2+y^2}\log\Big(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)$$

e ponendo $t=\sqrt{x^2+y^2}$ si conclude.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I=[0,\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t\cos(t),\, t\sin(t)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P=\big(0,\frac{\pi}{2}\big)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t\in I$ per cui $\gamma'(t)\neq 0$. In particolare per $P=\big(0,\frac{\pi}{2}\big)$ troviamo innanzitutto $t_0\in[0,\pi]$ tale che $\gamma(t_0)=P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} t_0\cos(t_0) = 0 \\ t_0\sin(t_0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Dalla prima si ricava $t_0 \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$, e sostituendo nella seconda si trova che l'unica soluzione è $t_0 = \frac{\pi}{2}$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \cos(t_0) - t_0 \sin(t_0) \\ \sin(t_0) + t_0 \cos(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$x + \frac{\pi}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = 0\,.$$

ii) considerando $\bar{\Omega}$ l'insieme di $\mathbb{R}^2$ delimitato dal sostegno di (γ, I) e dall'asse delle ascisse, determinare massimo e minimo su $\bar{\Omega}$ della funzione

$$f(x,y) = \exp(x^2 + y^2)$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è quello raffigurato nella Figura 3. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

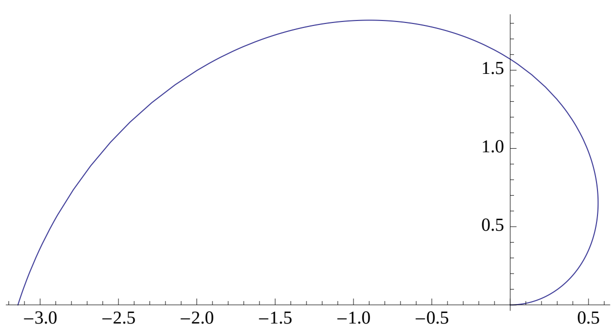

Figure 3: L'insieme $\bar{\Omega}$

La funzione f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ e ha un solo punto critico libero in

$$P = (0,0)$$

l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x\,\exp(x^2 + y^2) = 0 \\ 2x\,\exp(x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $P \in \partial\bar{\Omega}$ e non appartiene alla parte interna di $\bar{\Omega}$, possiamo quindi considerarlo sin da ora, oppure essere fiduciosi di ritrovarlo quando studiamo il bordo.

Passiamo allo studio di f sul bordo. Il bordo di $\bar{\Omega}$ ha due spigoli

$$Q_1 = (0,0) \quad \text{e} \quad Q_2 = (-\pi, 0)$$

e consiste di due pezzi, il sostegno Γ di (γ, I) e il segmento $\Gamma_1 = \{y = 0, -\pi \le x \le 0\}$. Usiamo in entrambi i casi il metodo diretto. Per Γ usiamo la parametrizzazione $\gamma(t)$ del punto (i) e otteniamo la funzione di una variabile

$$g(t) = f(\gamma(t)) = \exp(t^2)\,, \qquad t \in [0, \pi]$$

La funzione g non ha punti critici in $(0, \pi)$, e quindi ci interessano soltanto i punti di bordo

$$\gamma(0) = Q_1 \quad \text{e} \quad \gamma(\pi) = Q_2\,.$$

Passiamo a Γ_1. Usiamo la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t,\, 0)\;, \qquad t \in [-\pi, 0]$$

componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \exp(t^2)\,, \qquad t \in [-\pi, 0]$$

Di nuovo la funzione g_1 non ha punti critici in $(-\pi, 0)$, e quindi ci interessano soltanto i punti di bordo

$$\gamma_1(-\pi) = Q_2 \quad \text{e} \quad \gamma_1(0) = Q_1\,.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = f(Q_1) = f(0,0) = 1 \quad \text{e} \quad f(Q_2) = f(-\pi, 0) = \exp(\pi^2)\,,$$

per cui il massimo di f è $\exp(\pi^2)$ e il minimo è 1.

Esercizio 3. *Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione*

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\;, \qquad \sigma(u,v) = \big(u + v\,,\, v^2\,,\, u^2 + 2uv\big)$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le v \le 2\,,\, v \ge -u\,,\, v \ge \frac{1}{2}u\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (1,\ 1,\ 0)$;

Dobbiamo trovare il vettore normale a Σ nel punto P, che si ottiene come $P = \sigma(0,\ 1)$. Scriviamo quindi innanzitutto la matrice Jacobiana di σ da cui otteniamo il vettore normale come prodotto vettoriale tra le due colonne. Troviamo

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2v \\ 2(u+v) & 2u \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} -4v(u+v) \\ 2v \\ 2v \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi $\vec{n}\,(0,\ 1)$, che è

$$\vec{n}\,(0,\ 1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è

$$-4(x-1) + 2(y-1) + 2z = 0\,.$$

ii) calcolare l'integrale di superficie $\iint_\Sigma x\,dS$.

Applicando la formula per l'integrale di superficie, dobbiamo calcolare l'integrale

$$\iint_\Sigma x\,dS = \iint_D x(u,v)\|\vec{n}(u,v)\|\,dudv$$

Dal punto i) troviamo che

$$\|\vec{n}(u,v)\| = \sqrt{16v^2(u+v)^2 + 4v^2 + 4v^2} = 2\sqrt{2}\,v\sqrt{1+2(u+v)^2}$$

dove abbiamo usato che $v \geq 0$ su D.

L'insieme D è raffigurato nella figura 2, e si può scrivere come insieme semplice rispetto alla u nella forma

$$D = \{(u,v)\,:\, 0 \leq v \leq 2\,,\, -v \leq u \leq 2v\}$$

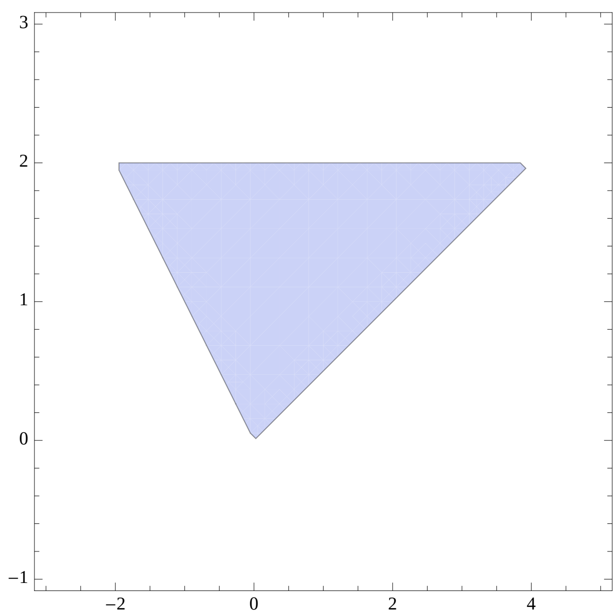

Figure 4: L'insieme D

Applichiamo quindi le formule di riduzione per insiemi semplici e otteniamo

$$\iint_\Sigma x\,dS = \iint_D x(u,v)\|\vec{n}(u,v)\|\,dudv = \iint_D 2\sqrt{2}\,v(u+v)\sqrt{1+2(u+v)^2}\,dudv =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^2 \left(\int_{-v}^{2v} v(u+v)\sqrt{1+2(u+v)^2}\,du\right) dv = 2\sqrt{2}\int_0^2 \left(\frac{v}{6}[1+2(u+v)^2]^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{-v}^{2v} dv =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^2 \left(v[1+18v^2]^{\frac{3}{2}} - v\right) dv = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{90}[1+18v^2]^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}v^2\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{270}\left(73^{\frac{5}{2}} - 181\right)$$