ES. 1 $X_1, X_2 \sim B(1,p)$ indip. con $X_i = 1$ se esce teste, $X_i = 0$ se esce croce

$P(\text{due teste}) = P(X_1 + X_2 = 2) = \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 = p^2$

$P(\text{due risultati diversi}) = P(X_1 + X_2 = 1) = \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1 = 2p(1-p)$

a) $p^2 = 2(1-p)p \iff p = 2(1-p) \iff p = 2/3$

b) $Y = X_1 + \dots + X_{450}$, $X_k \sim B(1, 2/3)$

$P(\text{ottenere almeno 290 volte teste}) = P(Y \geq 290) =$

$= P(X_1 + \dots + X_{450} \geq 290) =$

$$= P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{450} - 450\, E[X_k]}{\sqrt{450 \cdot Var(X_k)}} \geq \frac{290 - 450\, E[X_k]}{\sqrt{450 \cdot Var(X_k)}} \right) \sim$$

$$E[X_k] = \frac{2}{3}, \quad Var(X_k) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{X_1 + \dots + X_{450} - 450\, E[X_k]}{\sqrt{450 \cdot Var(X_k)}} \approx N(0,1) \sim Z$$

$$\sim P\left(Z \geq \frac{290 - 300}{\sqrt{100}} \right) = P(Z \geq -1) =$$

$$= 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \sim 0.84134$$

ES. 2 Dato $\vartheta > 0$ sia

$$F_\vartheta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ c_\vartheta x^2, & 0 < x < \sqrt{\vartheta} \\ 1, & x \geq \sqrt{\vartheta} \end{cases}, \quad c_\vartheta \in \mathbb{R}$$

a) F_ϑ deve verificare:

(i) F_ϑ è debolmente crescente

(ii) $\lim_{x\to-\infty} F_\vartheta(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} F_\vartheta(x)=1$

(iii) F_ϑ è continua (vogliamo una v.a. con densità)

(i)
- per $x\leq 0$, ok
- per $0<x<\sqrt{\vartheta}$, serve $c_\vartheta\geq 0$
- per $x\geq\sqrt{\vartheta}$, ok
- globalmente serve $c_\vartheta\geq 0$ e $c_\vartheta\cdot\vartheta\leq 1$

(ii) ok

(iii) serve $\lim_{x\to 0^+} F_\vartheta(x)=0$ e $\lim_{x\to\sqrt{\vartheta}^-} F_\vartheta(x)=1$

quindi $c_\vartheta\geq 0$ e $c_\vartheta\cdot\vartheta=1$

$$\Rightarrow \boxed{c_\vartheta=\frac{1}{\vartheta}}$$

Una v.a. X ha quindi densità $f_\vartheta(x)=\begin{cases}\frac{2}{\vartheta}x, & \text{per } 0\leq x\leq\sqrt{\vartheta}\\ 0, & \text{alt.}\end{cases}$

quindi $E_\vartheta[X^k]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_\vartheta(x)\,dx=\int_0^{\sqrt{\vartheta}}\frac{2}{\vartheta}x^{k+1}\,dx=\frac{2}{\vartheta}\left.\frac{x^{k+2}}{k+2}\right|_0^{\sqrt{\vartheta}}=$

$$=\frac{2}{k+2}\vartheta^{k/2}\quad\forall k\geq 1$$

Ne segue che $E_\vartheta[X]=\frac{2}{3}\sqrt{\vartheta}$, $E_\vartheta[X^2]=\frac{1}{2}\vartheta$ e

$$Var_\vartheta(X)=E_\vartheta[X^2]-E_\vartheta[X]^2=\frac{1}{2}\vartheta-\frac{4}{9}\vartheta=\frac{1}{18}\vartheta$$

b) Sia $X_1, \dots, X_n$ il campione statistico con funzione di ripartizione F_ϑ.

- Metodo dei momenti

Considerando innanzitutto il momento primo, si trova

$$E_\vartheta[X] = \bar{x} \iff \frac{2}{3}\sqrt{\vartheta} = \bar{x} \iff \vartheta = \frac{9}{4}\bar{x}^2$$

Dunque se $\bar{x} > 0$ si ha $\tilde{\vartheta} = \frac{9}{4}\bar{x}^2$.

Poiché $x_k > 0 \ \forall k$, si ha $\bar{x} > 0$ e dunque la condizione è verificata.

- Metodo di massima verosimiglianza

Costruiamo la funzione

$$(0,+\infty) \ni \vartheta \longmapsto L(\vartheta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_\vartheta(x_k) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\vartheta}\right)^n x_1 \cdots x_n , & \text{se } x_k \in [0, \sqrt{\vartheta}] \ \forall k \\ 0 , & \text{altrimenti} \end{cases}$$

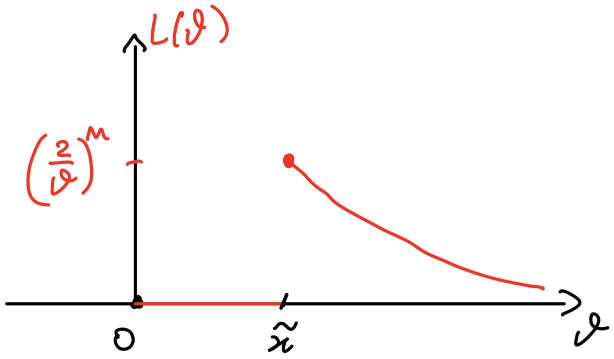
Poiché $x_k > 0 \ \forall k$, e si scrive

$$x_k \leq \sqrt{\vartheta} \ \forall k \iff \vartheta \geq x_k^2 \ \forall k \iff \vartheta \geq \tilde{x} := \max\{x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2\} > 0$$

possiamo scrivere

$$(0,+\infty) \ni \vartheta \longmapsto L(\vartheta; x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\vartheta}\right)^n x_1 \cdot \ldots \cdot x_n , & \text{se } \vartheta \geq \tilde{x} \\ 0 , & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il grafico della funzione $L(\vartheta; x_1, \dots, x_n)$ è quindi



da cui si deduce che

$$\hat{\vartheta} = \max\{x_1^2, \dots, x_n^2\} > 0$$

ES. 3 $\quad X_1, \dots, X_n \quad , \quad X_k \sim B(1, p)$

$$n = 200 \, , \qquad \hat{p} = \frac{8}{200} = 0.04$$

a) Precisione della stima $= \dfrac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \, q_{1-\alpha/2}$

Quindi deve essere $\sqrt{\dfrac{0.04 \cdot 0.96}{200}} \, q_{1-\alpha/2} = 0.02$

$$\Leftrightarrow \quad q_{1-\alpha/2} = \sqrt{\frac{200}{0.04 \cdot 0.96}} \, 0.02 = \sqrt{\frac{2}{0.96}} \sim 1.443$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi(q_{1-\alpha/2}) \sim \Phi(1.443) \Leftrightarrow 1 - \alpha/2 \sim \Phi(1.443)$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \sim 2(1 - \Phi(1.443))$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \alpha \sim 2\Phi(1.443) - 1 \sim 2 \cdot 0.926 - 1$$

$$\sim 0.852$$

Fiducia $\sim 85\%$

L'intervallo bilatero è $[\, \hat{p} - \text{prec. stima}, \ \hat{p} + \text{prec. stima} \,]$

quindi è

$$[0.04 - 0.02,\ 0.04 + 0.02] = [0.02,\ 0.06]$$

b) Con $H_0)\ p \le 0.02$, $H_1)\ p > 0.02$

il p-value è dato da

$$\bar{\alpha} = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}(\hat{p} - p_0)\right)$$

con $n = 200$, $\hat{p} = 0.04$, $p_0 = 0.02$, da cui

$$\bar{\alpha} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{200}{0.02 \cdot 0.98}} \cdot 0.02\right) \sim 1 - \Phi(2.02) \sim$$

$$\sim 1 - 0.97831 \sim 0.02$$

Quindi l'ipotesi del responsabile della ditta è da scartare.

(c) Fissando $n = 200$, $p_0 = 0.02$, cerchiamo $\hat{p}$ massimo per cui $\bar{\alpha} \ge 0.3$. Quindi

$$1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}(\hat{p} - p_0)\right) \ge 0.3$$

$$\Longleftrightarrow 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{200}{0.02 \cdot 0.98}}(\hat{p} - 0.02)\right) \ge 0.3$$

$$\Longleftrightarrow \Phi\left(\sqrt{\frac{200}{0.02 \cdot 0.98}}(\hat{p} - 0.02)\right) \le 0.7$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{\frac{200}{0.02 \cdot 0.98}}(\hat{p} - 0.02) \le q_{0.7}$$

$$\Longleftrightarrow (\hat{p} - 0.02) \le \sqrt{\frac{0.02 \cdot 0.98}{200}}\, q_{0.7} \sim 10^{-2}\sqrt{0.98} \cdot 0.525$$

$$\sim 0.005$$

Quindi il valore massimo sarebbe $\hat{p} \leq 0.025$
che corrisponde a $0.025 \cdot 200 = 5$ prodotti difettosi.

ES. 3 (Vecchio programma)

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \in [0,1]$$

a) $(a \ b \ c \ d)\, P = (a \ b \ c \ d)$
con $a,b,c,d \geq 0$ e $a+b+c+d = 1$

$$\iff \begin{cases} \frac{2}{3} a + \frac{3}{4} b = a \\ \frac{1}{2} c = b \\ \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} c + \lambda d = c \\ \frac{1}{4} b + (1-\lambda) d = d \end{cases} \qquad \text{con } a,b,c,d \geq 0 \text{ e } a+b+c+d = 1$$

$$\underset{\lambda \neq 0}{\iff} \begin{cases} a = \frac{9}{4} b \\ c = 2b \\ d = \frac{1}{4\lambda} b \end{cases} \qquad \text{con } a,b,c,d \geq 0 \text{ e } a+b+c+d = 1$$

$$\implies (a, b, c, d) = \left(\frac{9\lambda}{21\lambda+1}, \frac{4\lambda}{21\lambda+1}, \frac{8\lambda}{21\lambda+1}, \frac{1}{21\lambda+1} \right)$$

per $\lambda \neq 0$.

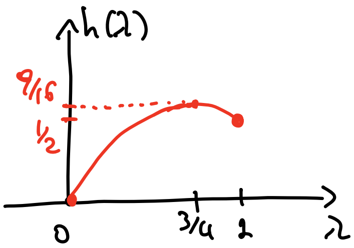
Se $\lambda = 0$, $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 1)$

b) $\overline{X}_0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$

$\overline{X}_1 = \overline{X}_0 P = (0 \quad 0 \quad \lambda \quad 1-\lambda)$

$\overline{X}_2 = \overline{X}_1 P = \left(0 \quad \frac{\lambda}{2} \quad \frac{\lambda}{2} + \lambda(1-\lambda) \quad (1-\lambda)^2\right)$

$P(X_2 = 3 \mid X_0 = 4)$ è dunque data da $\frac{\lambda}{2} + \lambda(1-\lambda) = h(\lambda)$



$h'(\lambda) = \frac{3}{2} - 2\lambda$

$h\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8} - \frac{9}{16} = \frac{9}{16}$

Il valore massimo si ottiene per $\lambda = \frac{3}{4}$

c) Se $\overline{X}_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$\overline{X}_1 = \overline{X}_0 P = (2/3 \quad 0 \quad 1/3 \quad 0)$

$\overline{X}_2 = \overline{X}_1 P = \left(4/9 \quad 1/6 \quad \frac{7}{18} \quad 0\right)$

$\overline{X}_3 = \overline{X}_2 P = \left(* \quad * \quad * \quad \frac{1}{24}\right)$

Quindi $T = 3 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$.