Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Prova intermedia del 9-1-2025

Esercizio 1. (15 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(1-x^2-y^2) + bx - y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dot{y} = ay(1-x^2-y^2) + by + x + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

(a) Mostrare che $\forall\, b > 0\ \exists\, a_0 > 0$ tale che $\forall\, a \geq a_0$ esiste un'orbita periodica per il sistema.

(b) Mostrare che, ponendo $a = 0$, $\exists\, b_0 > 0$ tale che $\forall\, b \geq b_0$ non esistono orbite periodiche per il sistema.

(c) Studiare l'esistenza di orbite periodiche per $a = b = 0$.

Esercizio 2. (15 punti) Si consideri la famiglia di trasformazioni continue $f_\lambda : [0,1] \to [0,1]$ data da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x + 2(1-\lambda)x^2, & \text{se} \quad x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 1 - \lambda(1-x) - 2(1-\lambda)(1-x)^2, & \text{se} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

per $\lambda \in [1, 4+2\sqrt{2}]$ (*si osservi che per* $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ *si ha* $f_\lambda(x) = 1 - f_\lambda(1-x)$).

(a) Discutere esistenza e stabilità dei punti fissi di f_λ al variare di λ.

(b) Nel caso $\lambda = 4$, determinare l'ω-limite dei punti in $[0,1]$.

(c) Studiare il comportamento caotico di f_λ per $\lambda \in (4, 4+2\sqrt{2}]$.

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(1-x^2-y^2) + bx - y + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dot{y} = ay(1-x^2-y^2) + by + x + \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Riscriviamo il sistema in coordinate polari (ρ, ϑ).

$$\dot{\rho} = \left.\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho}\right|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[ax^2(1-\rho^2) + bx^2 - xy + \frac{x^3}{\rho} + ay^2(1-\rho^2) + by^2 + xy + \frac{xy^2}{\rho}\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[a\rho^2(1-\rho^2) + b\rho^2 + x\rho\right] = a\rho(1-\rho^2) + b\rho + \rho\cos\vartheta$$

$$\dot{\vartheta} = \left.\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\rho^2}\right|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[axy(1-\rho^2) + bxy + x^2 + \frac{x^2y}{\rho} - axy(1-\rho^2) - bxy + y^2 - \frac{x^2y}{\rho}\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[\rho^2\right] = 1$$

Studiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = a\rho(1-\rho^2) + b\rho + \rho\cos\vartheta \\ \dot{\vartheta} = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{(a)}}$ $\forall b>0 \ \exists a_0>0$ t.c. $\forall a \geq a_0$ $\exists$ un'orbita periodica

Applichiamo il Teorema di Poincaré-Bendixson all'insieme

$$D_\varepsilon = \{(\rho,\vartheta) / \ \varepsilon \leq \rho \leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}, \ \varepsilon \in (0,1)$$

D_ε è compatto e non contiene punti fissi (infatti $\dot{\vartheta} \neq 0 \ \forall (\rho,\vartheta) \in D_\varepsilon$).

Inoltre:

$$\dot{\rho}\big|_{\rho=\varepsilon} = \varepsilon\left[a(1-\varepsilon^2) + b + \cos\vartheta\right] \geq \varepsilon\left[a(1-\varepsilon^2) + b - 1\right]$$

e quindi se $a > \dfrac{1-b}{1-\varepsilon^2}$ si ha $\dot{\rho}\big|_{\rho=\varepsilon} > 0$;

$$\dot\rho\big|_{\rho=\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon}\left[a\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)+b+\cos\vartheta\right] \le \frac{1}{\varepsilon}\left[a\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)+b+1\right]$$

e quindi se $a > \dfrac{\varepsilon^2(b+1)}{1-\varepsilon^2}$ si ha $\dot\rho\big|_{\rho=\frac{1}{\varepsilon}} < 0$.

Ne segue che fissato $b>0$ e $\varepsilon\in(0,1)$ possiamo porre

$$a_0 = \max\left\{\frac{1-b}{1-\varepsilon^2},\ \frac{\varepsilon^2(b+1)}{1-\varepsilon^2}\right\}.$$

(b) Ponendo $a=0$, il sistema diventa

$$\begin{cases}\dot\rho = b\rho+\rho\cos\vartheta = \rho(b+\cos\vartheta)\\ \dot\vartheta = 1\end{cases}$$

Se $b\ge 1$ si ha $\dot\rho = \rho(b+\cos\vartheta)\ge\rho(1+\cos\vartheta)$, da cui

$\dot\rho\ge 0\ \forall(\rho,\vartheta)$ e $\dot\rho=0 \Leftrightarrow \vartheta=\pi\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, e $\dot\vartheta>0\ \forall(\rho,\vartheta)$.

Dunque ponendo $b_0=1$, se $b\ge b_0$ non possono esistere orbite periodiche.

(c) Ponendo $a=b=0$, il sistema diventa $\begin{cases}\dot\rho=\rho\cos\vartheta\\ \dot\vartheta=1\end{cases}$

Se la condizione iniziale è (ρ_0,ϑ_0), il sistema si può risolvere.

Infatti $\vartheta(t)=t+\vartheta_0$, da cui

$$\begin{cases}\dot\rho=\rho\cos(t+\vartheta_0)\\ \rho(0)=\rho_0\end{cases}$$

che ha soluzione $\rho(t)=\rho_0\, e^{[\sin(t+\vartheta_0)-\sin(\vartheta_0)]}$.

Quindi le soluzioni $(\rho(t),\vartheta(t))$ sono periodiche di periodo 2π in $(0,+\infty)\times S^1$.

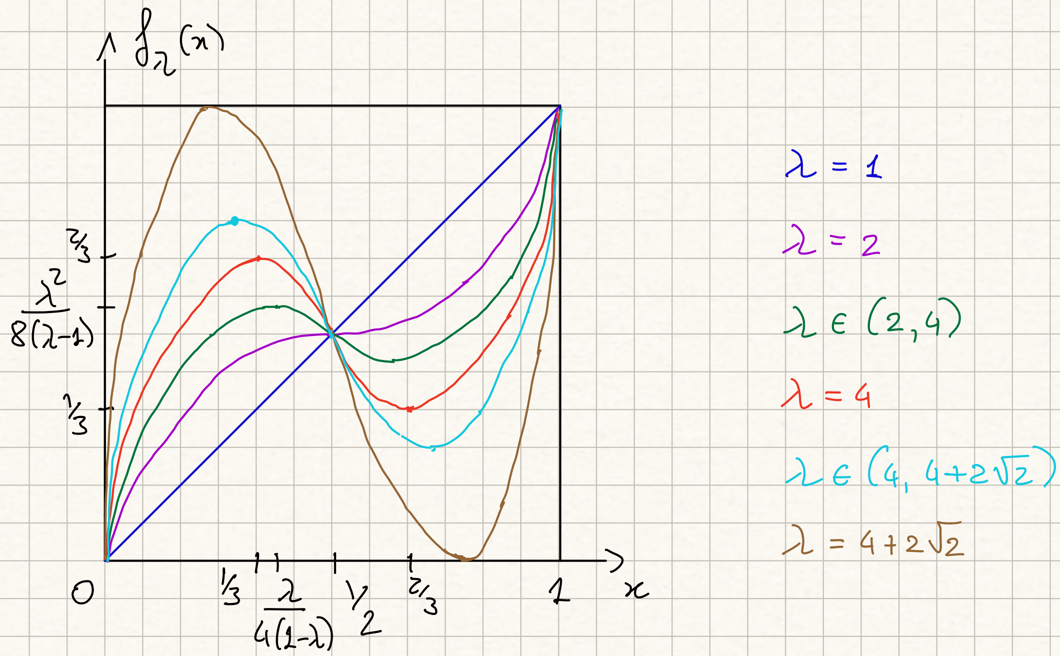
[Altro ragionamento: per il sistema $\begin{cases}\dot\rho=\rho\cos\vartheta\\ \dot\vartheta=1\end{cases}$ è possibile trovare le isocline]

ESERCIZIO 2

$$f_\lambda(x)=\begin{cases}\lambda x+2(1-\lambda)x^2, & \text{se } x\in[0,\frac12]\\ 1-\lambda(1-x)-2(1-\lambda)(1-x)^2, & \text{se } x\in[\frac12,1]\end{cases}$$

con $\lambda \in [1, 4+2\sqrt{2}]$

Disegniamo il grafico di f_λ per alcuni valori di λ, utilizzando l'osservazione che $f_\lambda(x) = 1 - f_\lambda(1-x)$ $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, e che per $x \in [0, \frac{1}{2}]$ vale: $f_\lambda(0) = 0 \ \forall \lambda$, $f_\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \ \forall \lambda$, $f'_\lambda(x) = 0 \iff x_\lambda = \frac{\lambda}{4(\lambda-1)} \ \forall \lambda > 1$ e $f_\lambda\left(\frac{\lambda}{4(\lambda-1)}\right) = \frac{\lambda^2}{8(\lambda-1)}$. Osserviamo che $\frac{\lambda^2}{8(\lambda-1)} = 1$ per $\lambda = 4+2\sqrt{2}$



$\boxed{\text{(a)}}$

Per ogni $\lambda \in (1, 4+2\sqrt{2}]$, i punti fissi sono $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, come si ottiene risolvendo

$$\begin{cases} f_\lambda(x) = x \\ x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda x + 2(1-\lambda)x^2 = x \\ x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \iff \begin{cases} 2(1-\lambda)x^2 = (1-\lambda)x \\ x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

e poi utilizzando la simmetria $f_\lambda(x) = 1 - f_\lambda(1-x)$ su $[\frac{1}{2}, 1]$.

Usando $f'_\lambda(x) = \lambda + 4(1-\lambda)x$ su $[0, \frac{1}{2}]$, si trova che:

$(x_0 = 0)$ $f'_\lambda(0) = \lambda$, quindi $|f'_\lambda(0)| > 1 \ \forall \lambda > 1$, e x_0 è repulsivo $\forall \lambda > 1$

$(x_1 = \frac{1}{2})$ $f'_\lambda(\frac{1}{2}) = 2 - \lambda$ (infatti $f'_\lambda(x) = f'_\lambda(1-x)$ per $x \in [\frac{1}{2}, 1]$), quindi

$$|f'_\lambda(\tfrac{1}{2})| \begin{cases} < 1, & \text{se } \lambda \in (1, 3) \\ = 1, & \text{se } \lambda = 3 \\ > 1, & \text{se } \lambda \in (3, 4+2\sqrt{2}) \end{cases}$$

Nel caso $\lambda = 3$, si ha $f'_3(\frac{1}{2}) = -1$, $(f''_3)_+(\frac{1}{2}) = 4(1-\lambda) = -(f''_3)_-(\frac{1}{2})$,

$f_3'''(\tfrac12)=0$. Quindi $(Sf_3)(\tfrac13)$ esiste ed è negativa. Si deduce allora che

$$\boxed{x_1 \text{ è } \begin{array}{l} \text{attrattivo per } \lambda\in(1,3] \\ \text{repulsivo per } \lambda\in(3,4+2\sqrt{2}] \end{array}}$$

($x_2=1$) Per simmetria si comporta come x_0, quindi x_2 è repulsivo $\forall\lambda>1$.

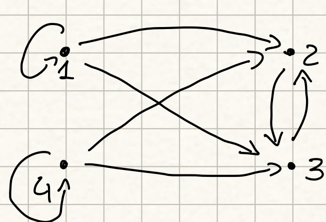
Se $\lambda=1$ troviamo $f_\lambda(x)=x$, quindi tutti i punti sono fissi e stabili ma non attrattivi.

$\boxed{\text{(b)}}$ Poniamo $\lambda=4$. Osserviamo che in questo caso $f_4'(x)=0 \iff x\in\{\tfrac13,\tfrac23\}$ e $f_4(\tfrac13)=\tfrac23$, $f_4(\tfrac23)=\tfrac13$. Dunque esiste un'orbita periodica di periodo minimo 2 attrattiva (essendo $(f_4^2)'(\tfrac13)=(f_4^2)'(\tfrac23)=0$) che ha come punti gli estremi locali di f_4.

Se consideriamo la partizione

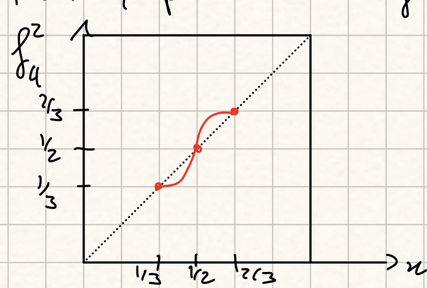
$$J_1=[0,\tfrac13],\quad J_2=[\tfrac13,\tfrac12],\quad J_3=[\tfrac12,\tfrac23],\quad J_4=[\tfrac23,1]$$

troviamo $f_4(J_1)=J_1\cup J_2\cup J_3$, $f_4(J_2)=J_3$, $f_4(J_3)=J_2$, $f_4(J_4)=J_2\cup J_3\cup J_4$, che ha f_4-grafo dato da



Escludendo i punti fissi, si vede dunque che tutte le orbite entrano prima o poi in $J_2\cup J_3$ e non ne escono più. Per studiare la dinamica in $J_2\cup J_3$ possiamo quindi guardare a f_4^2. Si ha

$f_4^2(J_2)=J_2$, $f_4^2(J_3)=J_3$, e usando che $f_4^2(\tfrac13)=\tfrac13$, $f_4^2(\tfrac12)=\tfrac12$, e $(f_4^2)'>0$, $(f_4^2)''>0$ su $(\tfrac13,\tfrac12)$, possiamo disegnare il grafico di f_4^2 in $J_2\cup J_3$



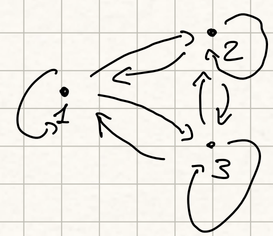
Quindi per f_4^2 tutte le orbite in $J_2 \cup J_3$ che non sono punti fissi di f_4 hanno come ω-limite $1/3$ oppure $2/3$.

Osservando infine che $A = \{x \in [0,1] \,/\, \exists\, n \geq 1 \text{ per cui } f_4^n(x) = \frac{1}{2}\} \neq \emptyset$, possiamo concludere che

$$\boxed{\omega(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } x = 0 \\ \{1/2\}, & \text{se } x \in A \cup \{1/2\} \\ \{1\}, & \text{se } x = 1 \\ \{1/3, 2/3\}, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \left(A \cup \{0, \frac{1}{2}, 1\}\right) \end{cases}}$$

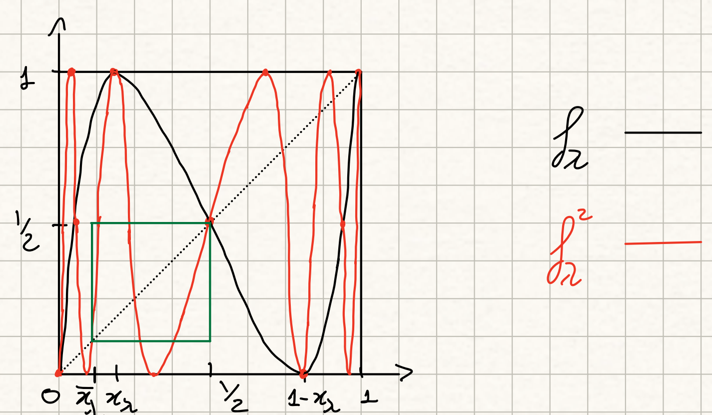
$\boxed{\text{(c)}}$ Studiamo ora il comportamento caotico.

Iniziamo ponendo $\lambda = 4 + 2\sqrt{2}$. In questo caso se consideriamo la partizione $J_1 = [0, x_\lambda]$, $J_2 = [x_\lambda, 1-x_\lambda]$, $J_3 = [1-x_\lambda, 1]$ dove $x_\lambda = \frac{\lambda}{4(\lambda-1)}$, il f_λ-grafo è



e dunque il cammino ammissibile $J_1 J_1 J_2 J_1$ garantisce l'esistenza di un'orbita di periodo minimo 3, visto che $J_1 \cap J_2 = \{x_\lambda\}$. Ne segue che $f_{4+2\sqrt{2}}$ è caotica.

Per $\lambda \in (4, 4+2\sqrt{2})$, ragioniamo partendo dal grafico di f_λ^2 nel caso $\lambda = 4 + 2\sqrt{2}$. Si ha



Sia $\bar{x}_\lambda$ un punto fisso di f_λ^2 e consideriamo $J_\lambda = [\bar{x}_\lambda, \frac{1}{2}]$. Si ottiene che per $\lambda = 4 + 2\sqrt{2}$, l'intervallo J_λ ricopre se stesso almeno due volte. Per continuità esiste quindi $\lambda_0 \in (4, 4+2\sqrt{2})$ t.c. $\forall \lambda \geq \lambda_0$ l'intervallo J_λ continua a ricoprire se stesso almeno due volte, e quindi f_λ è caotica per questi valori di λ.