Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Prova intermedia del 08-01-2026

Esercizio 1. (15 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sqrt{x^2+y^2}\left(x\sqrt{x^2+y^2} - 2x + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right) - 3y \\ \dot{y} = -\sqrt{x^2+y^2}\left(y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right) + 3x \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

Determinare l'esistenza di un intervallo di valori del parametro μ per i quali il sistema ammette almeno un'orbita periodica.

Esercizio 2. (15 punti) Si consideri la famiglia di trasformazioni continue $f_\lambda : [0,1] \to [0,1]$ data da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \left(2 - \frac{1}{2\lambda}\right) x, & \text{se} \quad x \in [0,\lambda]; \\ \frac{\lambda}{1-\lambda}\left(2 - \frac{1}{2\lambda}\right)(1-x), & \text{se} \quad x \in [\lambda, 1]. \end{cases}$$

per $\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

(a) Discutere esistenza e stabilità dei punti fissi di f_λ al variare di λ.

(b) Discutere al variare di λ l'esistenza di punti periodici di periodo minimo 2.

(c) Dire se esiste un parametro $\bar{\lambda} \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ tale che f_λ è caotica per ogni $\lambda \in [\bar{\lambda}, \frac{3}{4}]$, e caratterizzarlo.

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sqrt{x^2+y^2}\left(x\sqrt{x^2+y^2} - 2x + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right) - 3y \\ \dot{y} = -\sqrt{x^2+y^2}\left(y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\right) + 3x \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Riscriviamo il sistema in coordinate polari (ρ, ϑ) per $\rho > 0$.

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho}(x\dot{x} + y\dot{y})\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[-\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2\sqrt{x^2+y^2} - 2x^2 + \frac{\mu}{\sqrt{2}}x\right) - 3xy - \sqrt{x^2+y^2}\left(y^2\sqrt{x^2+y^2} - 2y^2 + \frac{\mu}{\sqrt{2}}y\right) + 3xy\right]\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[-\sqrt{x^2+y^2}\left((x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2} - 2(x^2+y^2) + \frac{\mu}{\sqrt{2}}(x+y)\right)\right]\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[-\rho\left(\rho^3 - 2\rho^2 + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\rho(\cos\vartheta + \sin\vartheta)\right)\right] =$$

$$= -\rho^3 + 2\rho^2 - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\rho(\cos\vartheta + \sin\vartheta)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{\rho^2}(x\dot{y} - y\dot{x})\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}}$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[-\sqrt{x^2+y^2}\left(xy\sqrt{x^2+y^2} - 2xy + \frac{\mu}{\sqrt{2}}x\right) + 3x^2 + \sqrt{x^2+y^2}\left(yx\sqrt{x^2+y^2} - 2yx + \frac{\mu}{\sqrt{2}}y\right) + 3y^2\right]\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}}$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[\sqrt{x^2+y^2}\left(-\frac{\mu}{\sqrt{2}}x + \frac{\mu}{\sqrt{2}}y\right) + 3(x^2+y^2)\right]\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}}$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[\rho^2\frac{\mu}{\sqrt{2}}(\sin\vartheta - \cos\vartheta) + 3\rho^2\right]$$

$$= 3 + \frac{\mu}{\sqrt{2}}(\sin\vartheta - \cos\vartheta)$$

Abbiamo quindi ottenuto il sistema

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\rho} = -\rho^3 + 2\rho^2 - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\rho(\cos\vartheta + \sin\vartheta) \\ \dot{\vartheta} = 3 + \frac{\mu}{\sqrt{2}}(\sin\vartheta - \cos\vartheta) \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}}$$

Per determinare l'esistenza di almeno un'orbita periodica, applichiamo il Teorema di Poincaré-Bendixson. Serve trovare un insieme

$$D = \{(\rho, \vartheta) \;/\; \rho_+ \le \rho \le \rho_-\}$$

che non contenga punti fissi e per cui $\dot\rho\big|_{\rho=\rho_+} > 0$ e $\dot\rho\big|_{\rho=\rho_-} < 0$.

Osserviamo che $|\sin\vartheta - \cos\vartheta| \le \sqrt{2}$, quindi

$$3 - |\mu| \le \dot\vartheta \le 3 + |\mu| \quad , \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Ne segue che se $|\mu| < 3$ il sistema non ammette punti fissi diversi dall'origine.

Inoltre, $|\cos\vartheta + \sin\vartheta| \le \sqrt{2}$, quindi

$$-\rho^3 + 2\rho^2 - |\mu|\rho \le \dot\rho \le -\rho^3 + 2\rho^2 + |\mu|\rho \quad , \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Poniamo $f(\rho) = -\rho(\rho^2 - 2\rho + |\mu|)$ e $g(\rho) = -\rho(\rho^2 - 2\rho - |\mu|)$.

Si osserva che se $|\mu| > 1$, $f(\rho) < 0$ $\forall \rho \in \mathbb{R}$, mentre noi vorremmo limitare $\dot\rho$ dal basso con un termine positivo.

Poniamo quindi $|\mu| \le 1$. Si ha che

$$f(\rho) = -\rho\left(\rho - (1 - \sqrt{1 - |\mu|})\right)\left(\rho - (1 + \sqrt{1 - |\mu|})\right)$$

$$g(\rho) = -\rho\left(\rho - (1 - \sqrt{1 + |\mu|})\right)\left(\rho - (1 + \sqrt{1 + |\mu|})\right)$$

In particolare

$$f(\rho) > 0 \iff \rho \in (1 - \sqrt{1 - |\mu|}\,,\, 1 + \sqrt{1 - |\mu|})$$

$$g(\rho) < 0 \iff \rho > 1 + \sqrt{1 + |\mu|}$$

Poiché $1 + \sqrt{1 - |\mu|} \le 1 + \sqrt{1 + |\mu|}$ $\forall\, |\mu| \le 1$, concludiamo che

$$\boxed{\begin{gathered}\forall \mu \in [-1, 1] \quad \exists\, \rho_+ \in (1 - \sqrt{1 - |\mu|}\,,\, 1 + \sqrt{1 - |\mu|}),\ \rho_- \in (1 + \sqrt{1 + |\mu|}\,,\, +\infty) \text{ tali che} \\ \rho_+ \lneq \rho_- \\ \dot\rho\big|_{\rho=\rho_+} \ge f(\rho_+) > 0 \,,\quad \dot\rho\big|_{\rho=\rho_-} \le g(\rho_-) < 0 \\ \dot\vartheta \ge 3 - |\mu| > 0 \,,\quad \forall \rho \in [\rho_+, \rho_-],\ \forall \vartheta\end{gathered}}$$

Possiamo quindi applicare il Teorema di Poincaré - Bendixson a

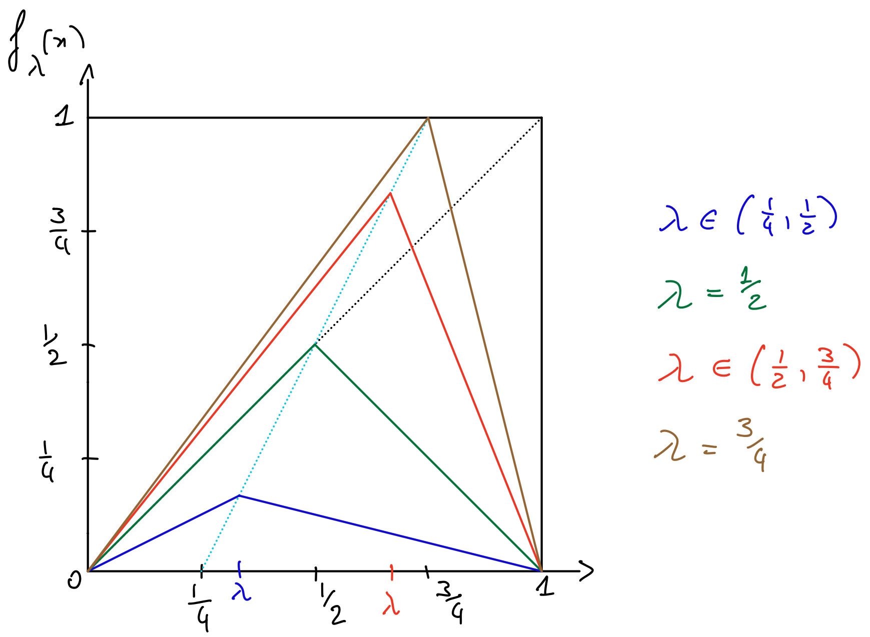
$$D = \{(\rho, \vartheta) \,/\, \rho_+ \leq \rho \leq \rho_-\}$$

e ottenere l'esistenza di un'orbita periodica per il sistema per ogni $\mu \in [-1, 1]$.

ESERCIZIO 2

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \left(2 - \frac{1}{2\lambda}\right) x, & \text{se } x \in [0, \lambda] \\ \frac{\lambda}{1-\lambda}\left(2 - \frac{1}{2\lambda}\right)(1-x), & \text{se } x \in [\lambda, 1] \end{cases}$$

con $\lambda \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.



Il segmento tratteggiato è l'insieme dei punti $(\lambda, f_\lambda(\lambda))$ per $\lambda \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

(a) Per ogni $\lambda \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, il punto $x_1 = 0$ è fisso e si ha $f_\lambda'(0) = 2 - \frac{1}{2\lambda}$.

Per $\lambda \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, non ci sono altri punti fissi.

Per $\lambda = \frac{1}{2}$, sono fissi anche tutti i punti dell'intervallo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, e $f_\lambda'(x) = 1$ per ogni $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Per $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, c'è un punto fisso $x_2 \in (\lambda, 1)$ dato da

$$x_2 = \frac{4\lambda - 1}{2\lambda + 1} \qquad \text{per cui} \qquad f_\lambda'(x_2) = -\frac{\lambda}{1-\lambda}\left(2 - \frac{1}{2\lambda}\right).$$

Osserviamo che $2 - \frac{1}{2\lambda} \in (0, 1)$ per $\lambda \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $2 - \frac{1}{2\lambda} = 1$ per $\lambda = \frac{1}{2}$,

$2 - \frac{1}{2\lambda} > 1$ per $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. Inoltre $\frac{\lambda}{1-\lambda}(2 - \frac{1}{2\lambda}) > 1$ per $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

Concludiamo quindi che:

* $\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. L'unico punto fisso è $x_1 = 0$ ed è attrattivo poiché $|f_\lambda'(0)| < 1$.

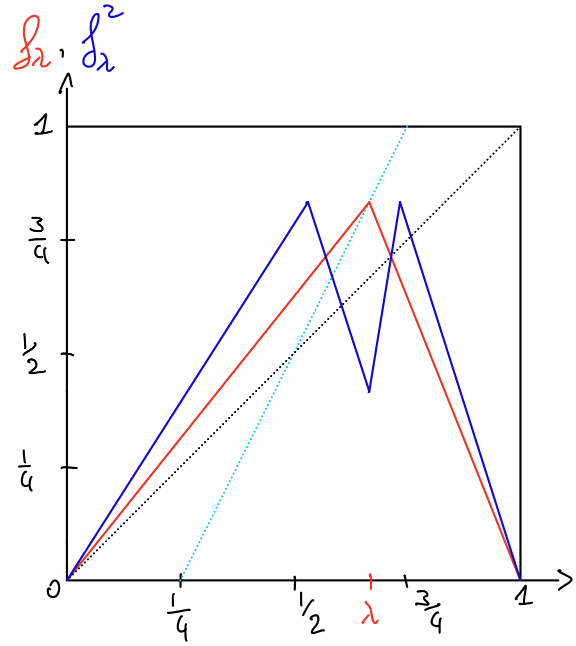
* $\lambda = \frac{1}{2}$. I punti fissi sono tutti i punti del segmento $[0, \frac{1}{2}]$. Non sono attrattivi né repulsivi, ma hanno una forma di stabilità non asintotica.

* $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. Ci sono due punti fissi $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{4\lambda - 1}{2\lambda + 1}$. Entrambi sono repulsivi poiché $|f_\lambda'(x_1)| > 1$ e $|f_\lambda'(x_2)| > 1$.

(b) Per $\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, si osserva che $\omega(x) = \{0\}$ $\forall x \in [0,1]$. Mentre per $\lambda = \frac{1}{2}$, si ha che $x \in [0, \frac{1}{2}]$ è fisso, e $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ verifica $f_\lambda(x) = 1 - x$ e dunque è preimmagine di un punto fisso.

Quindi, non possono esistere punti periodici di periodo minimo 2 se $\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

Poniamo $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. Una condizione sufficiente (e necessaria) per l'esistenza di un punto periodico di periodo minimo 2 è $f_\lambda^2(\lambda) < \lambda$, come ci si convince dal grafico di f_λ^2 (usando l'informazione che $f_\lambda^2(x_2) = x_2$ e che la funzione è lineare a tratti).



Poiché $f_\lambda(\lambda) > \lambda$ per $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, si ha

$$f_\lambda^2(\lambda) = \frac{\lambda}{1-\lambda}\left(2 - \frac{1}{2\lambda}\right)\left[1 - \left(2 - \frac{1}{2\lambda}\right)\lambda\right] = \frac{1}{4}\,\frac{4\lambda - 1}{1-\lambda}\,(3 - 4\lambda)$$

e quindi

$$f_\lambda^2(\lambda) < \lambda \iff (4\lambda-1)(3-4\lambda) < 4\lambda(1-\lambda) \iff 3(4\lambda^2-4\lambda+1) > 0 \iff 3(2\lambda-1)^2 > 0$$

che è verificato $\forall \lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

Dunque per ogni $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ esistono due punti periodici di periodo minimo 2.

$\boxed{(c)}$ Troviamo $\bar\lambda$ costruendo un ferro di cavallo per f_λ^2. Lo facciamo usando l'intervallo $J=[y_2, x_2]$, dove $x_2 = \frac{4\lambda-1}{2\lambda+1}$ è il punto fisso in $(\lambda, 1]$, e $y_2 = \frac{2\lambda}{2\lambda+1} \in [0,\lambda)$ soddisfa $f_\lambda(y_2) = x_2$.

Quindi $f_\lambda^2(x_2) = f_\lambda^2(y_2) = x_2$, e perché J ricopre se stesso due volte è sufficiente che $f_\lambda^2(\lambda) \leq y_2$, visto che $\lambda \in J$.

Quindi f_λ è caotica per tutti i valori $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ tali che

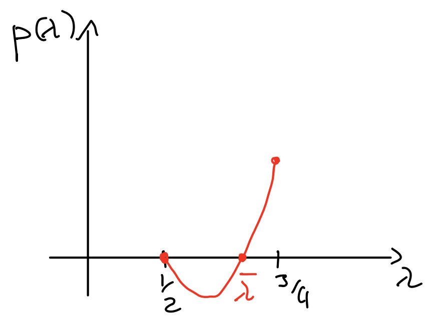
$$f_\lambda^2(\lambda) \leq y_2 \iff \frac{1}{4}\,\frac{4\lambda-1}{1-\lambda}(3-4\lambda) \leq \frac{2\lambda}{2\lambda+1} \iff 32\lambda^3 - 24\lambda^2 - 2\lambda + 3 \geq 0$$

Poniamo $p(\lambda) := 32\lambda^3 - 24\lambda^2 - 2\lambda + 3$. Si ha, per $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

$$p(\tfrac{1}{2}) = 0, \qquad p(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{3}{2} > 0$$

$$p'(\lambda) = 96\lambda^2 - 48\lambda - 2 > 0 \iff \lambda \in \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{12}, \frac{3}{4}\right] \quad e \quad \frac{3+2\sqrt{3}}{12} > \frac{1}{2}$$

quindi il grafico di $p(\lambda)$ è di questo tipo



e dunque questo ci restituisce $\bar\lambda$.