Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 08-01-2020

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \log\Big(1 + x^4 + 2y^2\Big)$$

i) scrivere per f il polinomio di Taylor di secondo grado nel punto $(0,0)$;

ii) calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;$$

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq -\frac{1}{2}\,,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq -\frac{1}{2}\,,\ x^2+y^2 \leq 1\big\}$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = \log(1+z)\,,\ z \leq e-1\big\}$$

i) scrivere una parametrizzazione globale di Σ;

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq \log(1+z)\,,\ z \leq e-1\,,\ x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}\right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log\left(1 + x^4 + 2y^2\right)$$

i) scrivere per f il polinomio di Taylor di secondo grado nel punto $(0,0)$;

La funzione $f(x,y)$ si può scrivere come composizione delle funzioni $g(x,y) = 1 + x^4 + 2y^2$ e $h(t) = \log(t)$. La funzione h ha come dominio $(0,+\infty)$ ed è differenziabile almeno due volte in tutti i punti del dominio, e la funzione g ha come dominio $\mathbb{R}^2$ ed è a valori maggiori o uguali a 1, inoltre è differenziabile almeno due volte in tutti i punti del dominio. Otteniamo quindi che il dominio naturale di f è $X = \mathbb{R}^2$ e la funzione è differenziabile almeno due volte in tutti i punti del dominio. Possiamo quindi scrivere il suo polinomio di Taylor di secondo grado nel punto $(0,0)$ e possiamo calcolare le derivate parziali in $(0,0)$ usando le solite formule di derivazione.

Per scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado di f in $(0,0)$ dobbiamo calcolare

$$f(0,0) = 0$$

$$\nabla f(0,0) = \nabla f(x,y)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{4x^3}{1+x^4+2y^2} \\ \frac{4y}{1+x^4+2y^2} \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = Hf(x,y)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{12x^2(1+x^4+2y^2)-4x^3(4x^3)}{(1+x^4+2y^2)^2} & \frac{-4x^3(4y)}{(1+x^4+2y^2)^2} \\ \frac{-4y(4x^3)}{(1+x^4+2y^2)^2} & \frac{4(1+x^4+2y^2)-4y(4y)}{(1+x^4+2y^2)^2} \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$T_2(x,y) = 2y^2$$

ii) calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

Il limite ha senso poiché $(0,0)$ è un punto di accumulazione per il dominio della funzione $\frac{f(x,y)-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ di cui dobbiamo calcolare il limite. Usando il punto i) possiamo scrivere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2 + o(x^2+y^2) - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 + o(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + o(\sqrt{x^2+y^2}) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Usando la disuguaglianza $y^2 \leq x^2 + y^2$ si mostra che il limite esiste ed è uguale a 0.

Il limite poteva essere svolto senza usare il polinomio di Taylor di f, usando che $f(x,y)$ si approssima con $x^4 + 2y^2$ vicino a $(0,0)$, e poi usando la disuguaglianza $x^4 + y^2 \leq x^2 + y^2$, che è verificata se $|x| \leq 1$, dunque in un intorno di $(0,0)$.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \geq -\frac{1}{2} \, , \, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} .$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

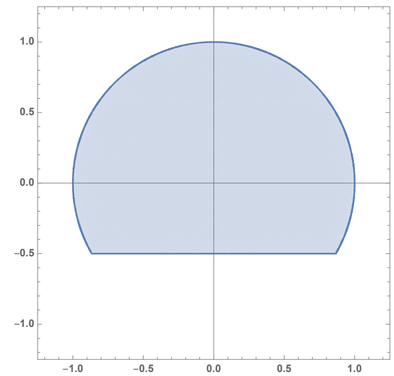

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

Abbiamo visto che la funzione f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Nel punto i) abbiamo calcolato il gradiente di f, da cui si trova che l'unico punto critico libero è $C = (0,0)$ che è interno a Ω, e va quindi considerato.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Come spigoli indichiamo i punti

$$S_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \, , \, -\frac{1}{2} \right) , \qquad S_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \, , \, -\frac{1}{2} \right) \quad \text{e} \quad S_3 = (0 \, , \, 1)$$

poiché dividiamo il bordo in tre parti

$$\Gamma_1 = \left\{ y = -\frac{1}{2} \, , \, -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ x = \sqrt{1-y^2} \, , \, -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ x = -\sqrt{1-y^2} \, , \, -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \right\}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \left(t \, , \, -\frac{1}{2} \right) , \qquad t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \, , \, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log\Big(\frac{3}{2} + t^4\Big), \qquad t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right],.$$

Si trova $g_1'(t) = \frac{4t^3}{\frac{3}{2}+t^4}$, che si annulla in $t_0 = 0 \in \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_1(0) = \left(0\,,\,-\frac{1}{2}\right)\,.$$

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \Big(\sqrt{1-t^2}\,,\,t\Big), \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}\,,\,1\right]\,,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log\Big(2 + t^4\Big), \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}\,,\,1\right]\,.$$

Si trova $g_2'(t) = \frac{4t^3}{2+t^4}$, che si annulla in $t_0 = 0 \in \big(-\frac{1}{2}\,,\,1\big)$, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_2 = \gamma_2(0) = (1\,,\,0)\,.$$

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = \Big(-\sqrt{1-t^2}\,,\,t\Big), \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}\,,\,1\right]\,,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = \log\Big(2 + t^4\Big), \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}\,,\,1\right]\,.$$

Si trova $g_3'(t) = \frac{4t^3}{2+t^4}$, che si annulla in $t_0 = 0 \in \big(-\frac{1}{2}\,,\,1\big)$, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_3 = \gamma_3(0) = (-1\,,\,0)\,.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C) = 0\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = \log\frac{33}{16}\,, \quad f(S_3) = \log 3\,,$$

$$f(Q_1) = \log\frac{3}{2} \quad f(Q_2) = f(Q_3) = \log 2\,.$$

Quindi il massimo di f è $\log 3$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

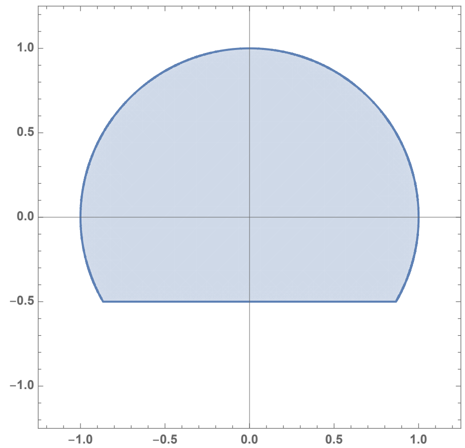

Figure 2: L'insieme Ω.

dove $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq -\frac{1}{2}\,,\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

Per semplificare il calcolo usiamo il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho, \theta)| = \rho\,.$$

Svolgiamolo con il cambiamento di variabili. Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy = \iint_S 1\, d\rho d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \,:\, \rho\sin\theta \geq -\frac{1}{2}\,,\, \rho^2 \leq 1\right\}$$

La seconda condizione ci dice che

$$\rho \in [0, 1]\,,$$

mentre la prima si riscrive come

$$\begin{cases} \rho \geq -\frac{1}{2\sin\theta} \\ \theta \in [0, \pi] \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} \rho \leq -\frac{1}{2\sin\theta} \\ \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

da cui troviamo

$$\begin{cases} \rho \in (0, +\infty) \\ \theta \in [0, \pi] \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} \rho \leq -\frac{1}{2\sin\theta} \\ \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Mettendo dunque insieme la seconda condizione e la prima condizione riscritta come sopra, si ottiene l'insieme rappresentato in figura 3 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per scriverlo come

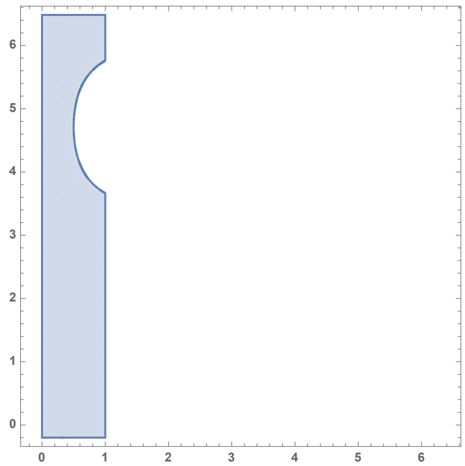

Figure 3: L'insieme S.

insieme semplice dobbiamo considerare le soluzioni in $[\pi, 2\pi]$ di

$$-\frac{1}{2\sin\theta} = 1$$

che sono $\theta_1 = \frac{7}{6}\pi$ e $\theta_2 = \frac{11}{6}\pi$. Dunque

$$S = \left\{(\rho,\theta)\ :\ 0 < \theta < \frac{7}{6}\pi\,,\ 0 \le \rho \le 1\right\} \bigcup \left\{(\rho,\theta)\ :\ \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi\,,\ 0 \le \rho \le -\frac{1}{2\sin\theta}\right\} \bigcup$$

$$\bigcup \left\{(\rho,\theta)\ :\ \frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi\,,\ 0 \le \rho \le 1\right\}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint_S 1\,d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{7}{6}\pi} \left(\int_0^1 1\,d\rho\right) d\theta + \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \left(\int_0^{-\frac{1}{2\sin\theta}} 1\,d\rho\right) d\theta = \int_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^1 1\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{7}{6}\pi} 1\,d\theta - \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \frac{1}{2\sin\theta}\,d\theta + \int_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi} 1\,d\theta =$$

$$= \frac{7}{6}\pi - \left(\frac{1}{2}\log|\tan\frac{\theta}{2}|\right)\Big|_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} + 2\pi - \frac{11}{6}\pi =$$

$$= \frac{4}{3}\pi - \frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan\frac{11}{12}\pi}{\tan\frac{7}{12}\pi}\right|.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2 = \log(1+z)\,,\ z \le e-1\right\}$$

i) scrivere una parametrizzazione globale di Σ;

L'insieme Σ si può interpretare come superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z il grafico della funzione $y = g(z)$ data da $g(z) = \sqrt{\log(1+z)}$. Il dominio naturale della funzione g è l'insieme $\{\log(1+z) \geq 0\} = \{z \geq 0\}$, e quindi per Σ si considera $g : [0, e-1] \to \mathbb{R}$.

Possiamo quindi scrivere la parametrizzazione globale

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad \sigma(t,\theta) = \Big(\sqrt{\log(1+t)}\,\cos\theta\,,\ \sqrt{\log(1+t)}\,\sin\theta\,,\ t\Big)\,.$$

con

$$D = \{(t,\theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \,:\, 0 \leq t \leq e-1\}$$

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq \log(1+z)\,,\ z \leq e-1\,,\ x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}\right\}$$

L'insieme V è definito quando $\log(1+z) \geq \frac{1}{2}$, ossia per $z \geq e^{\frac{1}{2}} - 1$, quindi si può riscrivere come

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq \log(1+z)\,,\ e^{\frac{1}{2}} - 1 \leq z \leq e-1\right\}$$

In questo modo il volume di V si può calcolare utilizzando la formula di integrazione per strati come

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V 1\,dxdydz = \int_{e^{\frac{1}{2}}-1}^{e-1} \Big(\iint_{\frac{1}{2}\leq x^2+y^2\leq \log(1+z)} 1\,dxdy\Big)\,dz =$$

$$= \pi \int_{e^{\frac{1}{2}}-1}^{e-1} \Big(\log(1+z) - \frac{1}{2}\Big)\,dz = \pi\Big((1+z)\log(1+z) - \frac{3}{2}z\Big)\Big|_{e^{\frac{1}{2}}-1}^{e-1} =$$

$$= \pi\Big(-\frac{e}{2} + e^{\frac{1}{2}}\Big)\,.$$