Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 08-01-2019

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (14 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = 2x^3y - 2xy^3 + 2xy$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{y^{\frac{3}{2}} + xy}$$

ii) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \le y \le 2\,,\, y \ge -x\big\}\ .$$

Esercizio 2. (8 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{x^2+y^2}\,, & \text{per } x \ge 0 \\ 1\,, & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,,\, 0 \le y \le (x+1)^2\big\}$.

Esercizio 3. (8 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^4 - 2x^2 - y^3 - y^2 - z^2 + 4 = 0\big\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \big(-2\,,\,1\,,\,\sqrt{10}\big)$;

ii) determinare, se possibile, una parametrizzazione locale di Σ in un intorno del punto $Q = (2\,,\,2\,,\,0)$ e in un intorno del punto $R = (1\,,\,1\,,\,1)$.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = 2x^3y - 2xy^3 + 2xy$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{y^{\frac{3}{2}} + xy}$$

La funzione di cui si chiede di calcolare il limite è definita su $\{y \geq 0\} \setminus \{y(\sqrt{y}+x) = 0\}$, insieme di cui $(0,0)$ è punto di accumulazione. Iniziamo studiando il comportamento del limite lungo alcune direzioni:

- l'asse y. Restringendoci all'insieme $\{x = 0, y > 0\}$ si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\, x=0, y>0} \frac{f(x,y)}{y^{\frac{3}{2}} + xy} = \lim_{y\to 0^+} \frac{0}{y^{\frac{3}{2}}} = 0\,;$$

- le rette $x = \lambda y$, con $y > 0$. Si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\, x=\lambda y} \frac{f(x,y)}{y^{\frac{3}{2}} + xy} = \lim_{y\to 0^+} \frac{2(\lambda^3 - \lambda)y^4 + 2\lambda y^2}{y^{\frac{3}{2}} + \lambda y^2} = 0\,;$$

- le curve $y = x^\alpha$ con $x > 0$ e $\alpha > 0$. Si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\, y=x^\alpha} \frac{f(x,y)}{y^{\frac{3}{2}} + xy} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^{3+\alpha} - 2x^{1+3\alpha} + 2x^{1+\alpha}}{x^{\frac{3}{2}\alpha} + x^{1+\alpha}} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})}{x^{\frac{3}{2}\alpha} + o(x^{\frac{3}{2}\alpha})} = 0\,; & \text{per } \alpha \in (0,2) \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3 + o(x^3)}{2x^3 + o(x^3)} = 1\,; & \text{per } \alpha = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})}{x^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})} = 2\,; & \text{per } \alpha > 2 \end{cases}$$

Avendo ottenuto due risultati diversi lungo direzioni diverse, il limite non esiste.

ii) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 2y\,(3x^2 - y^2 + 1) = 0 \\ 2x\,(x^2 - 3y^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Studiando la prima equazione si ottiene che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x\,(x^2 - 3y^2 + 1) = 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} 3x^2 + 1 = y^2 \\ 2x\,(x^2 - 3y^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Nel primo sottosistema, sostituendo $y = 0$ nella seconda troviamo $2x(x^2 + 1) = 0$, quindi solo la soluzione
$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
Nel secondo sottosistema, sostituendo la prima nella seconda si trova $2x(-8x^2 - 2) = 0$, da cui $x = 0$. Otteniamo quindi altre due soluzioni
$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Per caratterizzare i tre punti critici andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione differenziabile due volte su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo
$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12xy & 6x^2 - 6y^2 + 2 \\ 6x^2 - 6y^2 + 2 & -12xy \end{pmatrix} .$$
Sostituendo i punti critici troviamo:
$$Hf(C_1) = Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
si ha $\det Hf(C_1) = -4 < 0$, dunque C_1 è punto di sella;
$$Hf(C_2) = Hf\,(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$
si ha $\det Hf(C_2) = -16 < 0$, dunque C_2 è punto di sella;
$$Hf(C_3) = Hf\,(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$
si ha $\det Hf(C_3) = -16 < 0$, dunque C_3 è punto di sella.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x, y)$ su
$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \leq y \leq 2 \, , \, y \geq -x \right\} .$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione è un polinomio, dunque non ci sono punti di non differenziabilità, e i punti critici liberi sono stati trovati al punto precedente. L'unico interno all'insieme Ω è C_3, che quindi è il primo punto da prendere in considerazione.

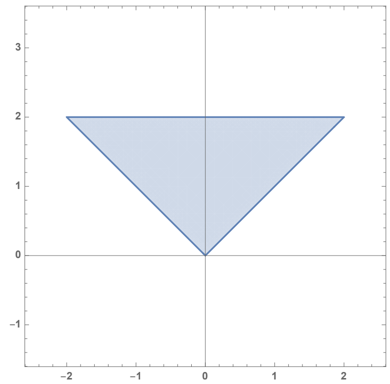

Figure 1: L'insieme Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \{y = x\,,\ 0 \le x \le 2\}$$

$$\Gamma_2 = \{y = -x\,,\ -2 \le x \le 0\}$$

$$\Gamma_3 = \{y = 2\,,\ -2 \le x \le 2\}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\,t)\,, \qquad t \in [0,2]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 2t^2\,, \qquad t \in [0,2]\ .$$

Risulta $g_1'(t) = 4t$, dunque non ci sono punti critici in $(0,2)$.

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (t\,,\,-t)\,, \qquad t \in [-2,0]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = -2t^2\,, \qquad t \in [-2,0]\ .$$

Risulta $g_2'(t) = -4t$, dunque non ci sono punti critici in $(-2,0)$.

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = (t\,,\,2)\,, \qquad t \in [-2,2]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = 4t^3 - 12t\,, \qquad t \in [-2, 2]\ .$$

Risulta $g_3'(t) = 12t^2 - 12$, dunque i punti critici in $(-2, 2)$ sono $t = \pm 1$, a cui corrispondono i punti critici vincolati

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C_3) = f(S_1) = 0\,, \quad f(S_2) = f(Q_1) = 8\,, \quad f(S_3) = f(Q_2) = -8\,.$$

Dunque il massimo di f è 8 e il minimo è -8.

Esercizio 2. *Data la funzione*

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{x^2+y^2}\,, & per\ x \geq 0 \\ 1\,, & per\ x < 0 \end{cases}$$

calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq (x + 1)^2\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

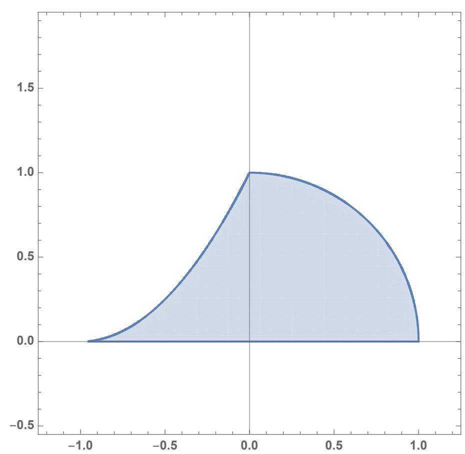

Figure 2: L'insieme Ω.

Dalla definizione della funzione f, conviene scrivere Ω come l'unione di due insiemi

$$\Omega_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\Omega_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x < 0\,,\ 0 \leq y \leq (x + 1)^2\}$$

per cui l'integrale diventa

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} 1\,dx\,dy$$

e studiamo i due integrali separatemente.

Per quanto riguarda Ω_1, conviene svolgere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Ponendo S_1 l'insieme tale che $\psi(S_1) = \Omega_1$, abbiamo

$$\iint_{\Omega_1} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{S_1} \rho\, e^{\rho^2}\,d\rho\,d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S_1. Dalla definizione di Ω_1 troviamo

$$S_1 = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, \rho\cos\theta \geq 0\,,\, \rho\sin\theta \geq 0\,,\, \rho^2 \leq 1\right\}$$

Le tre condizioni si riscrivono come

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad \rho \in [0,1]\,.$$

Possiamo dunque scrivere S_1 come il rettangolo

$$S_1 = \left\{(\rho,\theta) \,:\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\, 0 \leq \rho \leq 1\right\}\,,$$

e dunque

$$\iint_{\Omega_1} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{S_1} \rho\, e^{\rho^2}\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \rho\, e^{\rho^2}\,d\rho\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\, e^{\rho^2}\Big|_0^1\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e-1)\,d\theta = \frac{\pi}{4}(e-1)\,.$$

Per quanto riguarda Ω_2, possiamo scriverlo come insieme semplice nella forma

$$\Omega_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 0\,,\, 0 \leq y \leq (x+1)^2\right\}$$

e usare la formula di riduzione per insiemi semplici per calcolare

$$\iint_{\Omega_2} 1\,dx\,dy = \int_{-1}^0 \left(\int_0^{(x+1)^2} 1\,dy\right) dx = \int_{-1}^0 (x+1)^2\,dx = \frac{1}{3}\,(x+1)^3\Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3}\,.$$

In conclusione

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} 1\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(e-1) + \frac{1}{3}\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^4 - 2x^2 - y^3 - y^2 - z^2 + 4 = 0\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (-2\,,\,1\,,\,\sqrt{10})$;

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione di classe C^1

$$F(x, y, z) = x^4 - 2x^2 - y^3 - y^2 - z^2 + 4$$

dunque certamente esiste il piano tangente nei punti di Σ in cui non si annulla il gradiente di F. Abbiamo

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x \\ -3y^2 - 2y \\ -2z \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \nabla F(P) = \begin{pmatrix} -24 \\ -5 \\ -2\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il piano tangente a Σ esiste certamente in P, e la sua equazione cartesiana è

$$24(x + 2) + 5(y - 1) + 2\sqrt{10}\,(z - \sqrt{10}) = 0\,.$$

ii) determinare, se possibile, una parametrizzazione locale di Σ in un intorno del punto $Q = (2\,,\,2\,,\,0)$ e in un intorno del punto $R = (1\,,\,1\,,\,1)$.

Per il Teorema delle Funzioni Implicite, siamo certi di poter trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione in un intorno dei punti in cui non si annulla il gradiente di F. Calcoliamo quindi

$$\nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 24 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(R) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che certamente è possibile trovare la parametrizzazione richiesta in un intorno di entrambi i punti.

Nel caso del punto Q, poiché

$$\frac{\partial F}{\partial x}(Q) \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(Q) \neq 0\,,$$

possiamo scegliere se applicare il teorema rispetto alla x o rispetto alla y.

Se scegliamo di applicare il Teorema delle Funzioni Implicite rispetto alla x, otteniamo che esistono un intorno $U(2, 0)$, un intorno $V(2)$ ed una funzione $g(y, z) : U \to V$ tale che $g(2, 0) = 2$ e $F(g(y, z), y, z) = 0$ per ogni $(y, z) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione g. Dall'equazione

$$F(g(y, z), y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^4(y, z) - 2g^2(y, z) - y^3 - y^2 - z^2 + 4 = 0$$

con la condizione $g(2, 0) = 2$, troviamo

$$g(y, z) = \sqrt{1 + \sqrt{y^3 + y^2 + z^2 - 3}}$$

La parametrizzazione locale di Σ è quindi data da

$$\sigma(y,z) = (g(y,z),\, y,\, z)$$

con $(y,z) \in U$ e $g(y,z)$ come sopra.

Nel caso del punto R, poiché

$$\frac{\partial F}{\partial y}(R) \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(R) \neq 0\,,$$

possiamo scegliere se applicare il teorema rispetto alla y o rispetto alla z.

Se scegliamo di applicare il Teorema delle Funzioni Implicite rispetto alla z, otteniamo che esistono un intorno $U(1,1)$, un intorno $V(1)$ ed una funzione $h(x,y) : U \to V$ tale che $h(1,1) = 1$ e $F(x,y,h(x,y)) = 0$ per ogni $(x,y) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione h. Dall'equazione

$$F(x,y,h(x,y)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 2x^2 - y^3 - y^2 - h^2(x,y) + 4 = 0$$

con la condizione $h(1,1) = 1$, troviamo

$$h(x,y) = \sqrt{x^4 - 2x^2 - y^3 - y^2 + 4}$$

La parametrizzazione locale di Σ è quindi data da

$$\sigma(x,y) = (x,\, y,\, h(x,y))$$

con $(x,y) \in U$ e $h(x,y)$ come sopra.

Per entrambi i punti, non risulta agevole applicare il Teorema delle Funzioni Implicite rispetto alla variabile y.