Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 07-01-2013

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \log\left(\frac{1}{3}(x+y)^3 - (x+y) + (2x-y)^2\right)$$

i) trovare tutti i punti critici;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme limitato D che ha come frontiera il quadrilatero di vertici $Q_1 = (-\frac{3}{2}, 0)$, $Q_2 = (-\frac{1}{2}, 0)$, $Q_3 = (0, -\frac{1}{2})$ e $Q_4 = (0, -\frac{3}{2})$.

Esercizio 2. (12 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z^4 - 4\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo;

ii) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(2, -2\sqrt{2}, 2\right)$;

iii) calcolare il volume del solido

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |z| \le 2\,,\ x^2 + y^2 \le z^4 - 4\right\}$$

Esercizio 3. (10 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x(y+2)^2 + x^2 + y^2}{(x^2+y^2)(y+2)^2} \end{pmatrix}$$

i) dire se è irrotazionale;

ii) dire se è conservativo;

iii) calcolarne il lavoro lungo la curva (γ, I), con $I = [-1, 1]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(2t^3 - t,\ 2 - t^2\right)$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log\left(\frac{1}{3}(x+y)^3 - (x+y) + (2x-y)^2\right)$$

i) trovare tutti i punti critici;

La funzione ha come dominio l'insieme

$$\mathrm{Dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{1}{3}(x+y)^3 - (x+y) + (2x-y)^2 > 0\right\}$$

ed è differenziabile su tutto il suo dominio. Quindi cerchiamo i punti del dominio in cui si annulla il gradiente. Si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{(x+y)^2 - 1 + 4(2x-y)}{\frac{1}{3}(x+y)^3 - (x+y) + (2x-y)^2} \\ \frac{(x+y)^2 - 1 - 2(2x-y)}{\frac{1}{3}(x+y)^3 - (x+y) + (2x-y)^2} \end{pmatrix}$$

e quindi i punti critici liberi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{(x+y)^2 - 1 + 4(2x-y)}{\frac{1}{3}(x+y)^3 - (x+y) + (2x-y)^2} = 0 \\ \frac{(x+y)^2 - 1 - 2(2x-y)}{\frac{1}{3}(x+y)^3 - (x+y) + (2x-y)^2} = 0 \end{cases}$$

Supponendo che il denominatore non si annulli, e sommando e sottraendo multipli dei due numeratori, otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 1 \\ 2x - y = 0 \\ \frac{1}{3}(x+y)^3 - (x+y) + (2x-y)^2 \neq 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Tuttavia la prima soluzione del sistema non è nel dominio di f, e quindi l'unico punto critico della funzione è $P = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme limitato D che ha come frontiera il quadrilatero di vertici $Q_1 = (-\frac{3}{2}, 0)$, $Q_2 = (-\frac{1}{2}, 0)$, $Q_3 = (0, -\frac{1}{2})$ e $Q_4 = (0, -\frac{3}{2})$.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su D dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

L'insieme D si può scrivere nella forma

$$\overline{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq 0, \ y \leq 0, \ -\frac{3}{2} \leq x + y \leq -\frac{1}{2}\right\}$$

per cui si verifica che $\overline{D} \subset \mathrm{Dom}(f)$. Inoltre la funzione f non ha punti di non differenziabilità in D, ma il punto critico libero P di f sta in D, quindi è da tenere in considerazione.

Per studiare i punti critici vincolati al bordo di D, dividiamo il bordo in quattro parti e usiamo le parametrizzazioni

$$\gamma_1(t) = (1-t)\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t-1) \\ -\frac{1}{2}t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t-\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_4(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t \\ \frac{3}{2}(t-1) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log\left(\frac{1}{3}\left(t-\frac{3}{2}\right)^3 - \left(t-\frac{3}{2}\right) + (2t-3)^2\right), \qquad t \in [0,1]$$

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(t-1+\frac{1}{2}t\right)^2\right), \qquad t \in [0,1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = \log\left(\frac{1}{3}\left(-t-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-t-\frac{1}{2}\right) + \left(t+\frac{1}{2}\right)^2\right), \qquad t \in [0,1]$$

$$g_4(t) = f(\gamma_4(t)) = \log\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^3 - \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-3t-\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}\right)^2\right), \qquad t \in [0,1]$$

e le studiamo separatamente.

La funzione g_1 ha derivata

$$g_1'(t) = \frac{(t-\frac{3}{2})^2 - 1 + 4(2t-3)}{\frac{1}{3}(t-\frac{3}{2})^3 - (t-\frac{3}{2}) + (2t-3)^2}$$

Gli zeri di g_1' sono

$$t_\pm = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{17} \notin [0,1]$$

quindi g_1' ha nell'intervallo $[0,1]$ segno costante. Quindi g_1 non ha punti critici in $(0,1)$ e i suoi valori di massimo e minimo sono assunti agli estremi dell'intervallo. Allora, i punti da considerare sono

$$Q_1 = \gamma_1(0) = \left(-\frac{3}{2}, 0\right), \quad Q_2 = \gamma_1(1) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

La funzione g_2 ha derivata

$$g_2'(t) = \frac{3(\frac{3}{2}t-1)}{(\frac{3}{2}t-1)^2 + \frac{11}{24}}$$

L'unico zero di g_2' è

$$t = \frac{2}{3} \in [0,1]$$

e quindi g_2 ha nell'intervallo $[0,1]$ un solo punto critico. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_3 = \gamma_2(0) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \quad Q_4 = \gamma_2\left(\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right), \quad Q_5 = \gamma_2(1) = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

La funzione g_3 ha derivata

$$g_3'(t) = \frac{-(t+\frac{1}{2})^2 + 1 + 2(t+\frac{1}{2})}{\frac{1}{3}(-t-\frac{1}{2})^3 - (-t-\frac{1}{2}) + (t+\frac{1}{2})^2}$$

Gli zeri di g_3' sono

$$t_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2} \notin [0,1]$$

quindi g_3' ha nell'intervallo $[0,1]$ segno costante. Quindi g_3 non ha punti critici in $(0,1)$ e i suoi valori di massimo e minimo sono assunti agli estremi dell'intervallo. Allora, i punti da considerare sono

$$Q_6 = \gamma_3(0) = \left(0, -\frac{1}{2}\right), \quad Q_7 = \gamma_3(1) = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

La funzione g_4 ha derivata

$$g_4'(t) = \frac{\frac{27}{2}(3t-1)}{\frac{9}{4}(3t-1)^2 + \frac{3}{8}}$$

L'unico zero di g_4' è

$$t = \frac{1}{3} \in [0,1]$$

e quindi g_4 ha nell'intervallo $[0,1]$ un solo punto critico. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_8 = \gamma_4(0) = \left(0, -\frac{3}{2}\right), \quad Q_9 = \gamma_4\left(\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -1\right), \quad Q_{10} = \gamma_4(1) = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

Gli spigoli del bordo sono già inclusi nei punti prcedenti. Quindi dobbiamo confrontare i valori

$$f(P) = -\log\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$f(Q_1) = f(Q_{10}) = \log\left(\frac{75}{8}\right), \; f(Q_2) = f(Q_3) = \log\left(\frac{35}{24}\right), \; f(Q_4) = -\log\left(\frac{24}{11}\right)$$
$$f(Q_5) = f(Q_6) = -\log\left(\frac{24}{17}\right), \; f(Q_7) = f(Q_8) = \log\left(\frac{21}{8}\right), \; f(Q_9) = -\log\left(\frac{8}{3}\right)$$

Quindi

$$\max_D f = \log\left(\frac{75}{8}\right), \qquad \min_D f = -\log\left(\frac{8}{3}\right)$$

Esercizio 2. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 = z^4 - 4\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo;

La superficie Σ è una superficie di rotazione che si ottiene facendo ruotare intorno all'asse z il grafico della funzione $y = \sqrt{z^4 - 4}$ mostrato in figura 1. Osserviamo che la funzione è definita per $|z| \geq \sqrt{2}$, quindi la superficie Σ è formata da due parti disconnesse, una con $z \geq \sqrt{2}$ e una con $z \leq -\sqrt{2}$.

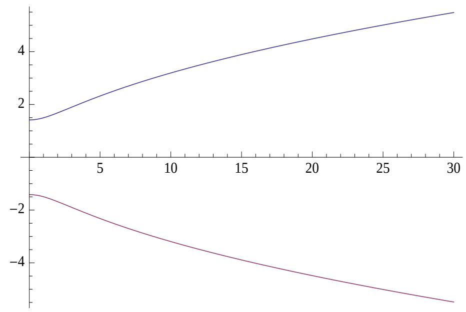

Figure 1: Il grafico di $y = \sqrt{z^4 - 4}$, con y in ascissa e z in ordinata.

ii) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \big(2, -2\sqrt{2}, 2\big)$;

La superficie Σ è anche un insieme di livello della funzione

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^4$$

che è di classe C^1 sul suo dominio. Per il corollario del Teorema delle Funzioni Implicite, se $\nabla F(P) \neq 0$ esiste il piano tangente e $\nabla F(P)$ ne rappresenta il vettore normale. Si trova

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -4z^3 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\nabla F(P) = \nabla F\left(2, -2\sqrt{2}, 2\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4\sqrt{2} \\ -32 \end{pmatrix} \neq 0$$

Allora l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto P è data da

$$4 \cdot (x - 2) - 4\sqrt{2} \cdot (y + 2\sqrt{2}) - 32 \cdot (z - 2) = 0$$

quindi da

$$4x - 4\sqrt{2}\, y - 32\, z + 40 = 0$$

iii) calcolare il volume del solido

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |z| \leq 2\,,\ x^2 + y^2 \leq z^4 - 4\right\}$$

Vista la forma dell'insieme U, cambiamo variabili e riscriviamo l'integrale utilizzando le coordinate cilindriche $x = \rho \cos\phi$, $y = \rho \sin\phi$, $z = t$. Si ottiene, ricordando che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione in coordinate cilindriche è $\det J = \rho$,

$$\mathrm{Vol}(U) = \iiint_U 1\, dxdy = \iiint_\Omega \rho\, d\rho d\phi dt$$

dove

$$\Omega = \Big\{(\rho, \phi, t) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \ : \ \sqrt{2} \le |t| \le 2, \ \rho^2 \le t^4 - 4\Big\}$$

Quindi si ottiene

$$\mathrm{Vol}(U) = 2\pi \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{t^4-4}} \rho\, d\rho \right) dt + 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\int_0^{\sqrt{t^4-4}} \rho\, d\rho \right) dt =$$

$$= 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{2} (t^4 - 4)\, dt = 2\pi \left(\frac{1}{5}(32 - 4\sqrt{2}) - 4(2 - \sqrt{2}) \right) = 16\pi \frac{2\sqrt{2} - 1}{5}$$

Esercizio 3. *Dato il campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x(y+2)^2 + x^2 + y^2}{(x^2+y^2)(y+2)^2} \end{pmatrix}$$

i) dire se è irrotazionale;

Dobbiamo calcolare il rotore di $\mathbf{F}$. Per semplificare i calcoli, notiamo che la seconda componente del campo si può scrivere come

$$F_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(y+2)^2}$$

Si trova allora che

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Quindi il campo è irrotazionale.

ii) dire se è conservativo;

Per vedere se è conservativo studiamo innanzitutto il suo dominio Ω. Si trova che

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Big(\{(0, 0)\} \cup \{y = -2\} \Big)$$

che non è semplicemente connesso. Per l'esattezza ha due componenti connesse: una data dall'insieme $\{y < -2\}$ che è semplicemente connessa, e l'altra data dall'insieme $\{y > -2\} \setminus \{(0, 0)\}$ che non è semplicemente connesso.

Per studiare se il campo è conservativo globalmente (lo è sicuramente nella componente $\{y < -2\}$), dobbiamo quindi studiare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una curva chiusa intorno all'origine. Per semplificare i calcoli scegliamo la curva

$$\chi(t) = \Big(\cos t,\ \sin t\Big), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si ottiene dalla formula

$$L(\mathbf{F}, \chi) = \int_0^{2\pi} < \mathbf{F}(\chi(t)), \chi'(t) > \, dt = \int_0^{2\pi} \Big[-(-\sin t)\sin t + \Big(\cos t + \frac{1}{(\sin t + 2)^2}\Big)\cos t \Big] \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(1 + \frac{\cos t}{(\sin t + 2)^2}\Big) \, dt = \Big(t - \frac{1}{\sin t + 2}\Big)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

Quindi il campo non è globalmente conservativo.

iii) calcolarne il lavoro lungo la curva (γ, I), con $I = [-1, 1]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \big(2t^3 - t,\ 2 - t^2\big)$$

Osserviamo che l'immagine della curva γ è contenuta nell'insieme $\{y \geq 1\}$. In particolare nella figura 2 è disegnato il sostegno della curva, che non è chiusa, ma ha come punto iniziale $P = (-1, 1)$ e come punto finale $Q = (1, 1)$.

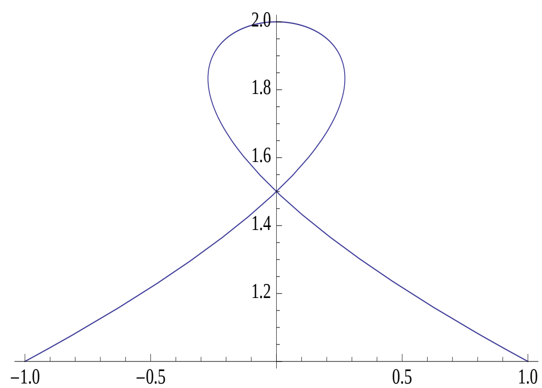

Figure 2: Il sostegno della curva (γ, I).

Per calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva (γ, I) possiamo considerare il campo ristretto all'insieme semplicemente connesso $\{y \geq 1\}$ che è interamente contenuto nel dominio del campo. Quindi, su $\{y \geq 1\}$, il campo risulta essere irrotazionale e conservativo, poiché l'insieme $\{y \geq 1\}$ è semplicemente connesso. Ne segue che esiste una funzione $f(x, y)$ definita su $\{y \geq 1\}$ e tale che

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \qquad \forall\, (x, y) \in \{y \geq 1\}$$

Per trovare una tale funzione $f(x, y)$, notiamo che possiamo scrivere

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{(y+2)^2} \end{pmatrix}$$

e scrivere $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$ con

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \qquad \forall\,(x,y) \in \{y \geq 1\}$$

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \frac{1}{(y+2)^2} \end{pmatrix} \qquad \forall\,(x,y) \in \{y \geq 1\}$$

Si trova allora che

$$g(x,y) = -\arctan\frac{x}{y}$$

e che

$$h(x,y) = -\frac{1}{y+2}$$

Allora possiamo scrivere

$$L(\mathbf{F},\gamma) = f(Q) - f(P) = g(Q) + h(Q) - g(P) - h(P) = -\arctan 1 - \frac{1}{3} + \arctan(-1) + \frac{1}{3} = -\frac{\pi}{2}$$