Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 07-02-2017

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^6}{x^2+y^4}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del dominio è continua;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, x^2 + y^4 \leq 1\right\}\ .$$

Esercizio 2. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I = \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\log(1 + t^2(1-t)^2)\,,\, t(1-t)\Big)$$

i) fare un disegno approssimativo del sostegno;

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\log\frac{85}{81}\,,\,\frac{2}{9}\right)$;

iii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y\,e^x \\ e^x - 3y^2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\ , \qquad \sigma(u,v) = \big(u+v\,,\, u^2+v^2\,,\, u-v\big)$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; u^2+v^2 \leq 4\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (1,\ 1,\ -1)$;

ii) calcolare l'integrale di superficie $\iint_\Sigma y\,dS$.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^6}{x^2+y^4}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del dominio è continua;

La funzione $f(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Infatti per $(x,y) \neq (0,0)$ il denominatore presente non si annulla mai.

Dalla definizione della funzione, la sua continuità è garantita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, parte interna del primo sottoinsieme di definizione, in quanto composizione di funzioni continue.

Rimane quindi da studiare solo la continuità nell'origine. Dobbiamo quindi determinare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^6}{x^2+y^4} = f(0,0) = 1\,.$$

Iniziamo a studiarne il comportamento lungo direzioni particolari. Le prime possibilità da considerare sono gli assi, le rette della forma $y = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, e le curve della forma $y = x^\alpha$ con $\alpha > 0$. Considerando gli assi si trova: per $y = 0$

$$\lim_{y=0,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^6}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1\,,$$

e per $x = 0$

$$\lim_{x=0,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^6}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{y^4} = 0\,.$$

Dunque possiamo già concludere che il limite non esiste, e quindi la funzione $f(x,y)$ è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e non in $(0,0)$.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, x^2+y^4 \leq 1\right\}\,.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a Ω, sui punti critici vincolati al bordo di Ω, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non differenziabilità della funzione.

La funzione f non è continua nell'origine, in cui dunque non è certamente differenziabile, quindi $D = (0,0)$, che è un punto del bordo, va preso in considerazione.

Cerchiamo ora i punti critici liberi interni a Ω, ossia le soluzioni di

$$\begin{cases} \frac{2x\,(x^2+y^4) - 2x\,(x^2+y^6)}{(x^2+y^4)^2} = 0 \\ \frac{6y^5\,(x^2+y^4) - 4y^3\,(x^2+y^6)}{(x^2+y^4)^2} = 0 \\ (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2xy^4(1-y^2) = 0 \\ 2y^9 + 6x^2y^5 - 4x^2y^3 = 0 \\ (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega} \end{cases}$$

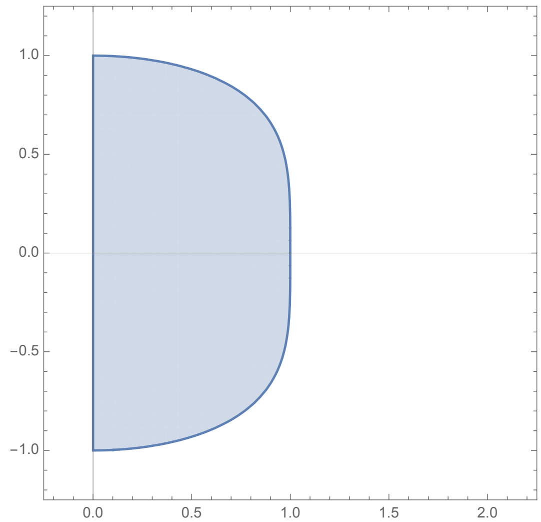

Figure 1: L'insieme Ω.

Dalla prima equazione si ricava $y = 0$, infatti la terza condizione impone $x > 0$ e $|y| < 1$. Sostituendo nella seconda equazione, si ottiene che i punti critici liberi interni a Ω sono tutti i punti della forma $C = \{(x, 0) \,:\, 0 < x < 1\}$.

Passiamo al comportamento di f sul bordo di Ω. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il bordo è composto da due parti

$$\Gamma_1 = \{x = 0\,,\ -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{x^2 = 1 - y^4\,,\ -1 \leq y \leq 1\right\}$$

Studiamo f ristretta a Γ_1. Parametrizziamo il segmento tramite

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1\,,\,1]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t^2\,, \qquad t \in [-1\,,\,1]$$

Si trova $g_1'(t) = 2t$, che si annulla in $t = 0$, e quindi ritroviamo il punto $(0, 0)$ che però è un punto di non differenziabilità, e quindi non è un punto critico vincolato. In ogni caso corrisponde al punto D trovato precedentemente.

Studiamo f ristretta a Γ_2. Parametrizziamo il segmento tramite

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - t^4} \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1\,,\,1]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 1 - t^4 + t^6 \,, \qquad t \in [-1\,,\,1]$$

Si trova $g_2'(t) = 6t^5 - 4t^3 = 2t^3(3t^2 - 2)$, che si annulla per $t = 0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Troviamo quindi i punti critici vincolati

$$Q_1 = \gamma_2\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{9}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q_3 = \gamma_2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{9}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(D) = f(0,0) = 1\,, \quad f(C) = f(x,0) = 1\,,$$

$$f(S_1) = f(0,1) = 1\,, \quad f(S_2) = f(0,1) = 1\,,$$

$$f(Q_1) = f\left(\sqrt{\frac{5}{9}}\,, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{23}{27}\,, \quad f(Q_2) = f(1,0) = 1\,, \quad f(Q_3) = f\left(\sqrt{\frac{5}{9}}\,, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{23}{27}\,.$$

Per cui su Ω, il minimo di f è $\frac{23}{27}$, e il massimo è 1.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\log(1 + t^2(1-t)^2)\,,\, t(1-t)\Big)$$

i) fare un disegno approssimativo del sostegno;

L'equazione parametrica della curva è

$$\begin{cases} x(t) = \log(1 + t^2(1-t)^2) \\ y(t) = t(1-t) \end{cases}$$

da cui si deduce che il sostegno è il grafico della funzione $x = \log(1+y^2)$ con $y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Si ottiene quindi il sostegno di figura 2 (vedere l'ultima pagina).

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\log\frac{85}{81}\,,\,\frac{2}{9}\right)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in I$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \left(\log\frac{85}{81}\,,\,\frac{2}{9}\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right]$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \log(1 + t_0^2(1-t_0)^2) = \log\frac{85}{81} \\ t_0(1-t_0) = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Si ricava immediatamente dalla seconda equazione che l'unica soluzione è $t_0 = \frac{1}{3}$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{2t_0(1-t_0)(1-2t_0)}{1+t_0^2(1-t_0)^2} \\ 1-2t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{85} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{12}{85} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\frac{1}{3}\left(x - \log\frac{85}{81}\right) - \frac{12}{85}\left(y - \frac{2}{9}\right) = 0\,.$$

iii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y\,e^x \\ e^x - 3y^2 \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = e^x - (-e^x) = 2\,e^x$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale, e di conseguenza non è conservativo.

La curva non è chiusa, dunque la strada più semplice è provare a calcolare il lavoro usando la definizione. Quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma) = \int_{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} <\mathbf{F}(\gamma(t))\,,\,\gamma'(t)>\,dt = \int_{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} < \begin{pmatrix} -t(1-t)\,(1+t^2(1-t)^2) \\ 1+t^2(1-t)^2 - 3t^2(1-t)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2t(1-t)(1-2t)}{1+t^2(1-t)^2} \\ 1-2t \end{pmatrix} > dt =$$

$$= \int_{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \Big[-2t^2(1-t)^2(1-2t) + (1-2t^2(1-t)^2)(1-2t) \Big]\,dt =$$

$$= \int_{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-2t)\,dt - \int_{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} 4t^2(1-t)^2(1-2t)\,dt =$$

$$= (t-t^2)\Big|_{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} - 4\left(\frac{1}{3}t^3 - t^4 + t^5 - \frac{1}{3}t^6\right)\Big|_{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

Altra soluzione. Avremmo anche potuto applicare il Teorema del Rotore, considerando il sostegno Γ della curva (γ, I) come parte del bordo dell'insieme semplice

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\frac{1}{4} \le y \le \frac{1}{4}\,,\ \log(1+y^2) \le x \le \log\frac{17}{16}\right\}$$

Il bordo di Ω è dato da $\Gamma \cup \Gamma_1$, dove

$$\Gamma_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{4} \, , \, x = \log \frac{17}{16} \right\}$$

e si parametrizza ad esempio con la curva (γ_1, I_1) data da $\gamma_1(t) = (\log \frac{17}{16}, t)$ e $I_1 = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Applicando il Teorema del Rotore e analizzando le orientazioni delle curve che parametrizzano il bordo, otterremmo dunque

$$\iint_\Omega \operatorname{rot}(\mathbf{F})(x,y)\, dx\, dy = L(\mathbf{F}, \gamma_1) - L(\mathbf{F}, \gamma)$$

da cui si calcola

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} < \begin{pmatrix} -\frac{17}{16}\, t \\ \frac{17}{16} - 3t^2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} > dt - \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \Big(\int_{\log(1+y^2)}^{\log \frac{17}{16}} 2e^x\, dx \Big)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24} \, .$$

Esercizio 3. *Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione*

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \ , \qquad \sigma(u,v) = \big(u+v \, , \, u^2+v^2 \, , \, u-v \big)$$

definita sull'insieme

$$D = \big\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u^2+v^2 \leq 4 \big\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (1, \ 1, \ -1)$;

Dobbiamo trovare il vettore normale a Σ nel punto P, che si ottiene come $P = \sigma\,(0, \ 1)$. Scriviamo quindi innanzitutto la matrice Jacobiana di σ da cui otteniamo il vettore normale come prodotto vettoriale tra le due colonne. Troviamo

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} -2u-2v \\ 2 \\ 2v-2u \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi $\vec{n}\,(0, \ 1)$, che è

$$\vec{n}\,(0, \ 1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è

$$-2(x-1) + 2(y-1) + 2(z+1) = 0 \, .$$

ii) calcolare l'integrale di superficie $\iint_\Sigma y\, dS$.

Applicando la formula per l'integrale di superficie, dobbiamo calcolare l'integrale

$$\iint_\Sigma y\, dS = \iint_D y(u,v)\|\vec{n}(u,v)\|\, dudv$$

Dal punto i) troviamo che

$$\|\vec{n}(u,v)\| = \sqrt{4(u+v)^2+4+4(v-u)^2} = 2\sqrt{1+2(u^2+v^2)}$$

e quindi

$$\iint_\Sigma y\, dS = \iint_D 2\,(u^2+v^2)\,\sqrt{1+2(u^2+v^2)}\, du\, dv$$

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = D$, abbiamo

$$S = \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty)\times[0,2\pi]\ :\ \rho \le 2\}$$

e quindi

$$\iint_\Sigma y\, dS = \iint_D 2\,(u^2+v^2)\,\sqrt{1+2(u^2+v^2)}\, du\, dv = \iint_S 2\,\rho^3\,\sqrt{1+2\rho^2}\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} 2\,\rho^3\,\sqrt{1+2\rho^2}\, d\theta\Big)\, d\rho = 4\pi \int_0^2 \rho^3\,\sqrt{1+2\rho^2}\, d\rho = 4\pi\left(\frac{1}{6}\,\rho^2\,(1+2\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 \rho\,(1+2\rho^2)^{\frac{3}{2}}\, d\rho\right) =$$

$$= 72\pi - \frac{2}{15}\pi\,(1+2\rho^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2 = 72\pi - \frac{486}{15}\pi + \frac{2}{15}\pi = \frac{596}{15}\pi\,.$$

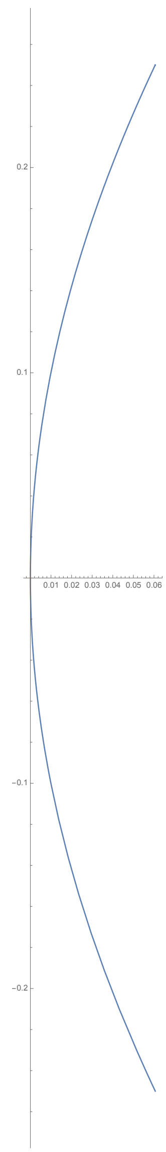

Figure 2: Il sostegno della curva (γ, I).