Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 05-07-2017

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \log\left(1+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare il dominio naturale di f;

ii) dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (0,0)$ nella direzione $v = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$;

iii)* determinare quali derivate direzionali di f esistono nel punto $P = (0,0)$;

iv) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 4\,,\, y \geq 2\,(2-x)\right\}.$$

Esercizio 2. (8 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-1,1]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(2t^2-1\,,\, \sin(\pi t)\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(-\frac{7}{8}\,,\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (10 punti) Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 2z\,,\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, 2z \leq 1\,,\, 2z \leq \frac{y^2}{x^2}\right\}$$

Può risultare utile sapere che $\frac{d}{dt}\left(\log\left(\frac{1+\sin t}{\cos t}\right) + \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right) = 2\,\frac{1}{\cos^3 t}$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \log\left(1 + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare il dominio naturale di f;

Osserviamo che per $(x,y) \neq (0,0)$ possiamo scrivere

$$f(x,y) = \log\left(\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)$$

che è dunque definita per $x \neq 0$. Poiché la funzione è poi definita separatamente in $(0,0)$, possiamo concludere che il dominio naturale di $f(x,y)$ è $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0\big\} \cup \{(0,0)\}$.

ii) dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (0,0)$ nella direzione $v = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$;

Usando la definizione della funzione non possiamo ricavare informazioni sulla differenziabilità nel punto P. Per studiare l'esistenza della derivata direzionale dobbiamo dunque usare la definizione, ossia studiare l'esistenza del limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P+tv) - f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(0 + t\sqrt{\frac{2}{3}}\,, 0 + t\sqrt{\frac{1}{3}}\right) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{t^2(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})}{t^2(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})}\right) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(\frac{4}{3}\right) - 0}{t}$$

Il limite precedente non esiste finito (limite destro e sinistro non sono finiti, e non coincidono), dunque la derivata direzionale studiata non esiste.

iii) determinare quali derivate direzionali di f esistono nel punto $P = (0,0)$;

Dobbiamo ragionare come nel punto ii), nel caso di un vettore generico $v = (v_1, v_2)$ di norma $\|v\| = 1$. Studiamo dunque l'esistenza di un valore finito per il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P+tv) - f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(0 + tv_1\,, 0 + tv_2\right) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{t^2(v_1^2-v_2^2)}{t^2(v_1^2+v_2^2)}\right) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(1 + (v_1^2 - v_2^2)\right) - 0}{t}$$

Innanzitutto dobbiamo escludere il caso $v = (0,1)$ per restare nel dominio naturale della funzione. Dall'espressione del limite che abbiamo ottenuto, si nota che il limite certamente non esiste finito in tutti i casi in cui $(v_1^2 - v_2^2) \neq 0$.

Se invece $(v_1^2 - v_2^2) = 0$, che si ha nei quattro casi $v = (\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\,,\,\pm\sqrt{\frac{1}{2}})$, allora il limite esiste finito ed è uguale a 0.

Concludiamo dunque che la derivata direzionale in $P = (0,0)$ esiste solo nelle direzioni $v = (\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\,,\,\pm\sqrt{\frac{1}{2}})$.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\,,\; y \geq 2\,(2-x)\right\}\,.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω

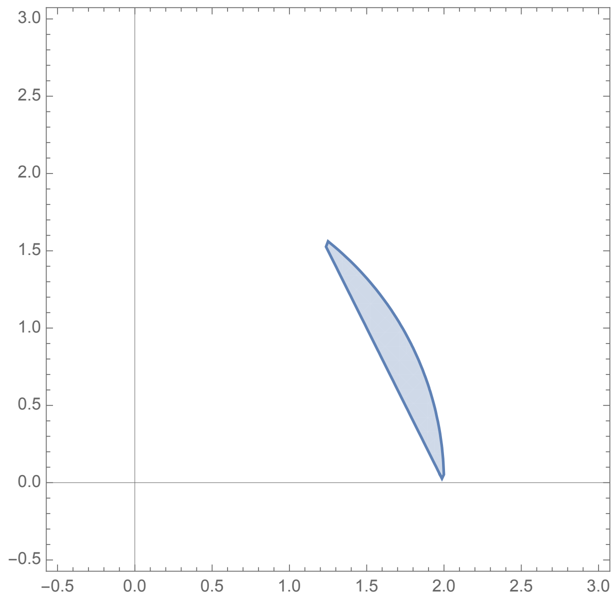

Figure 1: L'insieme Ω.

dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione f è certamente differenziabile in Ω, perché composizione di funzioni differenziabili. Nei punti di $\overset{\circ}{\Omega}$ calcoliamo allora il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y^2}{x\,(x^2+y^2)} \\ \\ -\frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

per cui gli unici punti critici liberi di f si trovano sull'asse delle ascisse, e non sono dunque interni a Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}\,.$$

La funzione f è differenziabile su tutto il bordo come detto prima. Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ x^2 + y^2 = 4 \, , \, \frac{6}{5} \leq x \leq 2 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ y = 2\,(2 - x) \, , \, \frac{6}{5} \leq x \leq 2 \right\} .$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (2\,\cos t \, , \, 2\,\sin t) \, , \qquad t \in [0, \bar{t}] \; ,$$

con $\tan \bar{t} = \frac{4}{3}$ e $\bar{t} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log\left(1 + \cos^2 t - \sin^2 t\right) = \log(2\cos^2 t) \, , \qquad t \in [0, \bar{t}] \; .$$

Risulta $g_1'(t) = -2\tan t$, e dunque non ci sono punti critici in $(0, \bar{t})$.

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (t \, , \, 2\,(2 - t)) \, , \qquad t \in \left[\frac{6}{5}, 2\right]$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log\left(\frac{2t^2}{5t^2 - 16t + 16}\right) \, , \qquad t \in \left[\frac{6}{5}, 2\right]$$

Abbiamo $g_2'(t) = \frac{16(2-t)}{t(5t^2-16t+16)}$, e dunque non ci sono punti critici in $(\frac{6}{5}, 2)$.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = \log(2) \quad \text{e} \quad f(S_2) = \log\left(\frac{18}{25}\right) \, .$$

Dunque il massimo di f è $\log(2)$ e il minimo è $\log\left(\frac{18}{25}\right)$.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [-1, 1]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 \, , \qquad \gamma(t) = \left(2t^2 - 1 \, , \, \sin(\pi t)\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(-\frac{7}{8} \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (-1, 1)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \left(-\frac{7}{8} \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (-1, 1)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2t_0^2 - 1 = -\frac{7}{8} \\ \sin(\pi t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $t_0 = \pm\frac{1}{4}$, e sostituendo nella seconda si ottiene $t_0 = \frac{1}{4}$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} 4t_0 \\ \pi\,\cos(\pi t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{7}{8}\right) - \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0\,.$$

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = -1\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale.

Studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva è chiusa, essendo $\gamma(-1) = (1,0) = \gamma(1)$, e il sostegno è disegnato in figura 2. Per il calcolo del lavoro possiamo utilizzare la definizione o

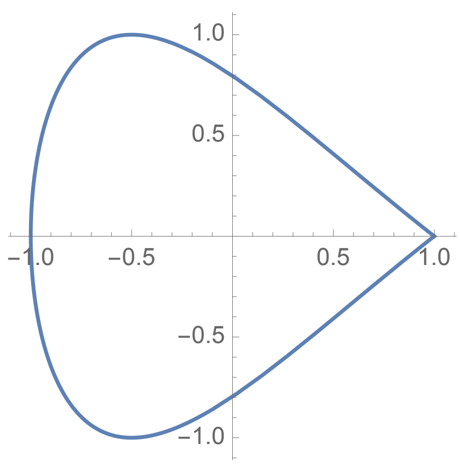

Figure 2: Il sostegno della curva (γ, I).

il Teorema del Rotore, le cui ipotesi sono facilmente soddisfatte. Usando la definizione di lavoro scriviamo

$$L(\mathbf{F},\gamma) = \int_{-1}^{1} < \mathbf{F}(\gamma(t))\,,\,\gamma'(t) > \,dt = \int_{-1}^{1} < \begin{pmatrix} 2t^2 - 1 + \sin(\pi t) \\ 2\sin(\pi t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4t \\ \pi\,\cos(\pi t) \end{pmatrix} > \,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big(4t(2t^2-1) + 4t\,\sin(\pi t) + 2\pi\,\sin(\pi t)\cos(\pi t)\Big)\,dt = \int_{-1}^{1} 4t\,\sin(\pi t)\,dt$$

infatti $t(2t^2-1)$ e $\sin(\pi t)\cos(\pi t)$ sono dispari, e quindi il loro integrale tra -1 e 1 è nullo. Dunque

$$L(\mathbf{F},\gamma) = \int_{-1}^{1} 4t\,\sin(\pi t)\,dt = -\frac{4}{\pi}\,t\cos(\pi t)\Big|_{-1}^{1} + \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos(\pi t)\,dt = \frac{8}{\pi}\,.$$

Svolgendo l'esercizio usando il Teorema del Rotore, dobbiamo invece scrivere innanzitutto l'insieme U, la parte del piano racchiusa dalla curva, come insieme semplice. Dalla parametrizzazione si ottiene che per $y \geq 0$, il sostegno è il grafico della funzione $y = \sin\left(\pi\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)$ con $x \in [-1.1]$. Inoltre il sostegno è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse. Possiamo concludere che

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 1\,,\, -\sin\left(\pi\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right) \leq y \leq \sin\left(\pi\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)\right\}$$

e scrivere quindi, osservando che la curva è percorsa in senso orario,

$$L(\mathbf{F},\gamma) = -\iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)\,dxdy = \iint_U 1\,dxdy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sin\left(\pi\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)}^{\sin\left(\pi\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)} 1\,dy\right)dx = 2\int_{-1}^{1}\sin\left(\pi\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)dx$$

e con il cambio di variabile $t = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$ si ottiene

$$L(\mathbf{F},\gamma) = 2\int_{0}^{1} 4t\,\sin(\pi t)\,dt = -\frac{8}{\pi}\,t\cos(\pi t)\Big|_{0}^{1} + \frac{8}{\pi}\int_{0}^{1}\cos(\pi t)\,dt = \frac{8}{\pi}$$

Esercizio 3. *Calcolare l'area della superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 2z\,,\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, 2z \leq 1\,,\, 2z \leq \frac{y^2}{x^2}\right\}$$

La superficie Σ è rappresentata in figura 3, ed è una parte del paraboloide $x^2+y^2 = 2z$, che consideriamo come superficie di rotazione, ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z il grafico della funzione $g(z) = \sqrt{2z}$, definita in $(0,+\infty)$. Se usiamo la parametrizzazione del paraboloide come

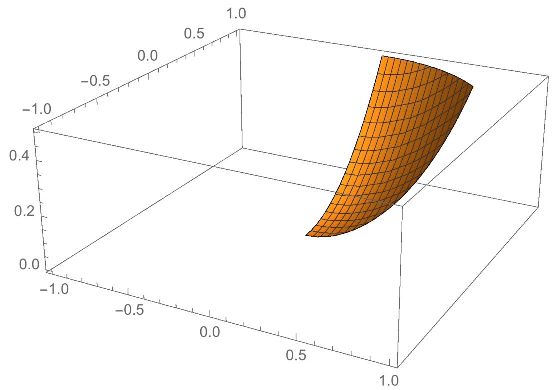

Figure 3: La superficie Σ.

superficie di rotazione, scriviamo che $\Sigma = \sigma(D)$ dove

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{con} \qquad \sigma(t,\varphi) = \left(\sqrt{2t}\,\cos\varphi\,,\ \sqrt{2t}\,\sin\varphi\,,\ t\right)$$

e l'insieme D si ottiene come sottoinsieme di $(0,+\infty)\times[0,2\pi]$ aggiungendo le restrizioni nella definizione di Σ, dunque

$$D = \left\{(t,\varphi) \in (0,+\infty)\times[0,2\pi]\ :\ \sqrt{2t}\,\cos\varphi \geq 0\,,\ \sqrt{2t}\,\sin\varphi \geq 0\,,\ 2t \leq 1\,,\ 2t \leq \tan^2\varphi\right\}$$

Le prime tre condizioni si riscrivono come

$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\,,$$

e insieme all'ultima condizione, permettono di disegnare l'insieme D come in figura 4 (con t sulle ascisse e φ sulle ordinate). Per scriverlo come insieme semplice rispetto alla t, dobbiamo ricavare

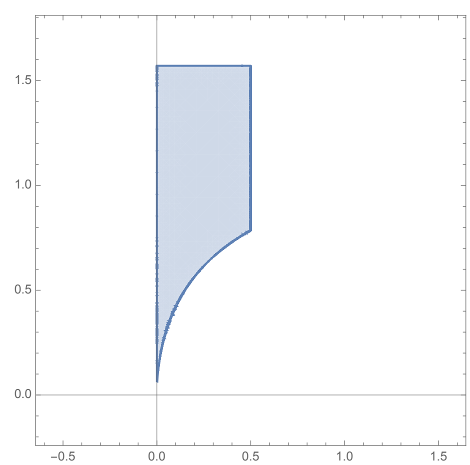

Figure 4: L'insieme D.

la soluzione di $\frac{1}{2}\tan^2\varphi = \frac{1}{2}$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, che è $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{4}$. Quindi scriviamo D come

$$D = \left\{(t,\varphi)\,:\, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\,,\, 0 \le t \le \frac{1}{2}\tan^2\varphi\right\} \bigcup \left\{(t,\varphi)\,:\, \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\,,\, 0 \le t \le \frac{1}{2}\right\}$$

Infine ricordiamo che l'area di una superficie si calcola come

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_\Sigma 1\, dS = \iint_D \|n(t,\varphi)\|\, dt d\varphi\,.$$

Dalla definizione di $\sigma(t,\varphi)$ ricaviamo

$$J_\sigma(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2t}}\cos\varphi & -\sqrt{2t}\,\sin\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2t}}\sin\varphi & \sqrt{2t}\,\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad n(t,\varphi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2t}\,\cos\varphi \\ -\sqrt{2t}\,\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\|n(t,\varphi)\| = \sqrt{2t+1}$$

e abbiamo

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{2t+1}\, dt d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}\tan^2\varphi} \sqrt{2t+1}\, dt\right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2t+1}\, dt\right) d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}\,(2t+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}\tan^2\varphi} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\,(2t+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}} d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{3\,\cos^3\varphi} - \frac{1}{3}\right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{3}\right) d\varphi =$$

$$= \left[\frac{1}{6}\left(\log\left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) + \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right) - \frac{1}{3}\varphi\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\right)\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\log(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2} + \pi(\sqrt{2}-1)\right)\,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 05-07-2017

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \log\left(1 + \frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare il dominio naturale di f;

ii) dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (0,0)$ nella direzione $v = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;

iii)* determinare quali derivate direzionali di f esistono nel punto $P = (0,0)$;

iv) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1 \, , \, y \geq 2\,(1-x)\right\} .$$

Esercizio 2. (8 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-1,1]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 \, , \qquad \gamma(t) = \Big(\sin(\pi t) \, , \, 2t^2 - 1\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{8}\right)$;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ x + 5y \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (10 punti) Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = 2z \, , \, x \geq 0 \, , \, y \geq 0 \, , \, 2z \leq 1 \, , \, 2z \leq \frac{y^2}{x^2}\right\}$$

Può risultare utile sapere che $\frac{d}{dt}\left(\log\left(\frac{1+\sin t}{\cos t}\right) + \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right) = 2\,\frac{1}{\cos^3 t}$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \log\left(1 + \frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare il dominio naturale di f;

Osserviamo che per $(x,y) \neq (0,0)$ possiamo scrivere

$$f(x,y) = \log\left(\frac{3x^2}{x^2+y^2}\right)$$

che è dunque definita per $x \neq 0$. Poiché la funzione è poi definita separatamente in $(0,0)$, possiamo concludere che il dominio naturale di $f(x,y)$ è $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0\big\} \cup \{(0,0)\}$.

ii) dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (0,0)$ nella direzione $v = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,,\,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;

Usando la definizione della funzione non possiamo ricavare informazioni sulla differenziabilità nel punto P. Per studiare l'esistenza della derivata direzionale dobbiamo dunque usare la definizione, ossia studiare l'esistenza del limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P+tv)-f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(0+t\sqrt{\frac{1}{3}}\,,\,0+t\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{t^2(\frac{2}{3}-\frac{2}{3})}{t^2(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})}\right) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1)-0}{t} = 0\,.$$

Dunque la derivata direzionale esiste e vale 0.

iii) determinare quali derivate direzionali di f esistono nel punto $P = (0,0)$;

Dobbiamo ragionare come nel punto ii), nel caso di un vettore generico $v = (v_1, v_2)$ di norma $\|v\| = 1$. Studiamo dunque l'esistenza di un valore finito per il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P+tv)-f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(0+tv_1\,,\,0+tv_2\right) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{t^2(2v_1^2-v_2^2)}{t^2(v_1^2+v_2^2)}\right) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(1+(2v_1^2-v_2^2)\right)-0}{t}$$

Innanzitutto dobbiamo escludere il caso $v = (0,1)$ per restare nel dominio naturale della funzione. Dall'espressione del limite che abbiamo ottenuto, si nota che il limite certamente non esiste finito in tutti i casi in cui $(2v_1^2 - v_2^2) \neq 0$.

Se invece $(2v_1^2 - v_2^2) = 0$, che si ha nei quattro casi $v = (\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\,, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$, allora il limite esiste finito ed è uguale a 0.

Concludiamo dunque che la derivata direzionale in $P = (0,0)$ esiste solo nelle direzioni $v = (\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\,, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\, y \geq 2\,(1-x)\right\}\,.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 5. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω

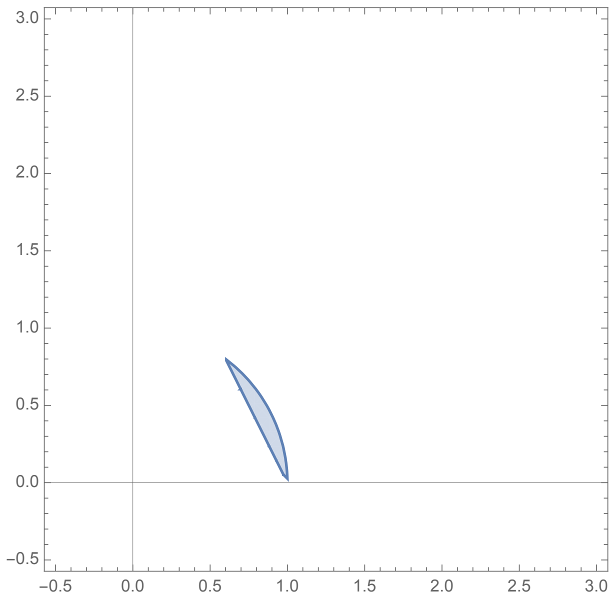

Figure 5: L'insieme Ω.

dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione f è certamente differenziabile in Ω, perché composizione di funzioni differenziabili. Nei punti di $\overset{\circ}{\Omega}$ calcoliamo allora il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y^2}{x\,(x^2+y^2)} \\ -\frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

per cui gli unici punti critici liberi di f si trovano sull'asse delle ascisse, e non sono dunque interni a Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}\,.$$

La funzione f è differenziabile su tutto il bordo come detto prima. Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{x^2 + y^2 = 1\,,\ \frac{3}{5} \leq x \leq 1\right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{y = 2\,(1-x)\,,\ \frac{3}{5} \leq x \leq 1\right\}\,.$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (\cos t\,,\,\sin t)\,, \qquad t \in [0, \bar{t}]\ ,$$

con $\tan \bar{t} = \frac{4}{3}$ e $\bar{t} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log\left(1 + 2\cos^2 t - \sin^2 t\right) = \log(3\cos^2 t)\,, \qquad t \in [0, \bar{t}]\ .$$

Risulta $g_1'(t) = -2\tan t$, e dunque non ci sono punti critici in $(0, \bar{t})$.

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (t\,,\,2\,(1-t))\,, \qquad t \in \left[\frac{3}{5}, 1\right]$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log\left(\frac{3t^2}{5t^2 - 8t + 3}\right)\,, \qquad t \in \left[\frac{3}{5}, 1\right]$$

Abbiamo $g_2'(t) = \frac{8(1-t)}{t(5t^2-8t+4)}$, e dunque non ci sono punti critici in $(\frac{3}{5}, 1)$.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = \log(3) \quad \text{e} \quad f(S_2) = \log\left(\frac{27}{25}\right)\,.$$

Dunque il massimo di f è $\log(3)$ e il minimo è $\log\left(\frac{27}{25}\right)$.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [-1,1]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\sin(\pi t)\,,\,2t^2 - 1\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,\frac{1}{8}\right)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (-1,1)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,\frac{1}{8}\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (-1,1)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \sin(\pi t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2t_0^2 - 1 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $t_0 = \pm\frac{3}{4}$, e sostituendo nella prima si ottiene $t_0 = \frac{3}{4}$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \pi \cos(\pi t_0) \\ 4t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ 3 \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$3\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{1}{8}\right) = 0\,.$$

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ x + 5y \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 1\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale.

Studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva è chiusa, essendo $\gamma(-1) = (0,1) = \gamma(1)$, e il sostegno è disegnato in figura 6. Per il calcolo del lavoro possiamo utilizzare la definizione o

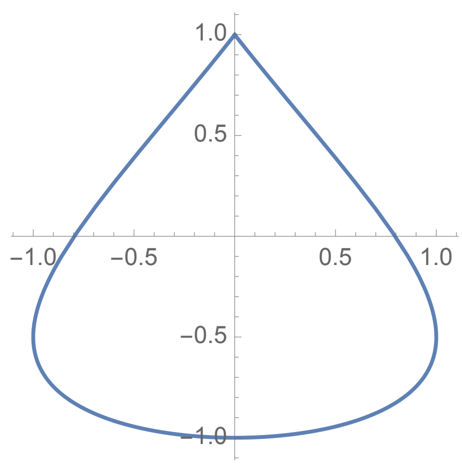

Figure 6: Il sostegno della curva (γ, I).

il Teorema del Rotore, le cui ipotesi sono facilmente soddisfatte. Usando la definizione di lavoro scriviamo

$$L(\mathbf{F},\gamma)=\int_{-1}^{1} < \mathbf{F}(\gamma(t))\,,\,\gamma'(t)> \,dt=\int_{-1}^{1} < \begin{pmatrix} -2\sin(\pi t) \\ \sin(\pi t)+5(2t^2-1)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi\cos(\pi t) \\ 4t \end{pmatrix} > dt =$$

$$=\int_{-1}^{1}\Big(-2\pi\,\sin(\pi t)\cos(\pi t)+4t\,\sin(\pi t)+20\,t(2t^2-1)\Big)\,dt=\int_{-1}^{1} 4t\,\sin(\pi t)\,dt$$

infatti $t(2t^2-1)$ e $\sin(\pi t)\cos(\pi t)$ sono dispari, e quindi il loro integrale tra -1 e 1 è nullo. Dunque

$$L(\mathbf{F},\gamma)=\int_{-1}^{1} 4t\,\sin(\pi t)\,dt=-\frac{4}{\pi}\,t\cos(\pi t)\Big|_{-1}^{1}+\frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos(\pi t)\,dt=\frac{8}{\pi}\,.$$

Svolgendo l'esercizio usando il Teorema del Rotore, dobbiamo invece scrivere innanzitutto l'insieme U, la parte del piano racchiusa dalla curva, come insieme semplice. Dalla parametrizzazione si ottiene che per $x\ge 0$, il sostegno è il grafico della funzione $x=\sin\left(\pi\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)$ con $y\in[-1.1]$. Inoltre il sostegno è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Possiamo concludere che

$$U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,-1\le y\le 1\,,\,-\sin\left(\pi\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)\le x\le \sin\left(\pi\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)\right\}$$

e scrivere quindi, osservando che la curva è percorsa in senso anti-orario,

$$L(\mathbf{F},\gamma)=\iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)\,dxdy=\iint_U 1\,dxdy=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sin\left(\pi\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)}^{\sin\left(\pi\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)} 1\,dx\right)dy=2\int_{-1}^{1}\sin\left(\pi\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)\,dy$$

e con il cambio di variabile $t=\sqrt{\frac{y+1}{2}}$ si ottiene

$$L(\mathbf{F},\gamma)=2\int_{0}^{1} 4t\,\sin(\pi t)\,dt=-\frac{8}{\pi}\,t\cos(\pi t)\Big|_{0}^{1}+\frac{8}{\pi}\int_{0}^{1}\cos(\pi t)\,dt=\frac{8}{\pi}$$

Esercizio 3. *Calcolare l'area della superficie*

$$\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2=2z\,,\,x\ge 0\,,\,y\ge 0\,,\,2z\le 1\,,\,2z\le\frac{y^2}{x^2}\right\}$$

La superficie Σ è rappresentata in figura 7, ed è una parte del paraboloide $x^2+y^2=2z$, che consideriamo come superficie di rotazione, ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z il grafico della funzione $g(z)=\sqrt{2z}$, definita in $(0,+\infty)$. Se usiamo la parametrizzazione del paraboloide come

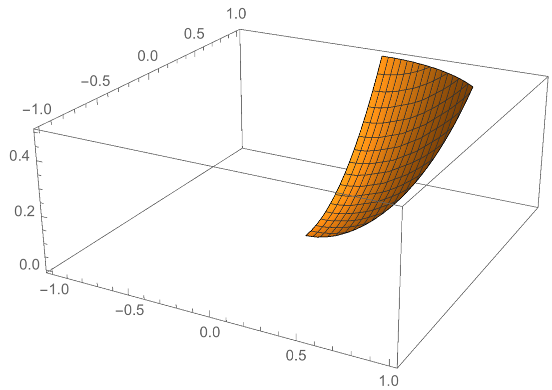

Figure 7: La superficie Σ.

superficie di rotazione, scriviamo che $\Sigma = \sigma(D)$ dove

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{con} \qquad \sigma(t,\varphi) = \left(\sqrt{2t}\,\cos\varphi\,,\ \sqrt{2t}\,\sin\varphi\,,\ t\right)$$

e l'insieme D si ottiene come sottoinsieme di $(0,+\infty) \times [0,2\pi]$ aggiungendo le restrizioni nella definizione di Σ, dunque

$$D = \left\{(t,\varphi) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi]\ :\ \sqrt{2t}\,\cos\varphi \geq 0\,,\ \sqrt{2t}\,\sin\varphi \geq 0\,,\ 2t \leq 1\,,\ 2t \leq \tan^2\varphi\right\}$$

Le prime tre condizioni si riscrivono come

$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\,,$$

e insieme all'ultima condizione, permettono di disegnare l'insieme D come in figura 8 (con t sulle ascisse e φ sulle ordinate). Per scriverlo come insieme semplice rispetto alla t, dobbiamo ricavare

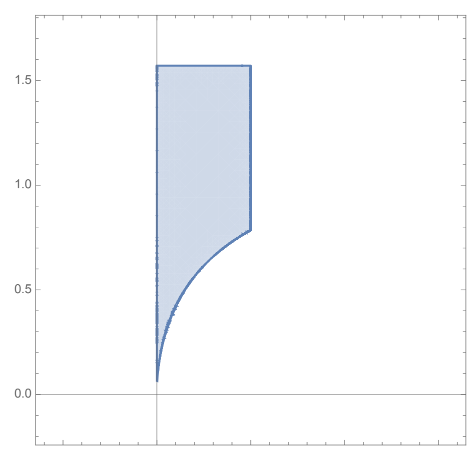

Figure 8: L'insieme D.

la soluzione di $\frac{1}{2}\tan^2\varphi = \frac{1}{2}$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, che è $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{4}$. Quindi scriviamo D come

$$D = \left\{(t,\varphi)\,:\,0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\,,\,0 \le t \le \frac{1}{2}\,\tan^2\varphi\right\} \bigcup \left\{(t,\varphi)\,:\,\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\,,\,0 \le t \le \frac{1}{2}\right\}$$

Infine ricordiamo che l'area di una superficie si calcola come

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} 1\,dS = \iint_D \|n(t,\varphi)\|\,dtd\varphi\,.$$

Dalla definizione di $\sigma(t,\varphi)$ ricaviamo

$$J_\sigma(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2t}}\,\cos\varphi & -\sqrt{2t}\,\sin\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2t}}\,\sin\varphi & \sqrt{2t}\,\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad n(t,\varphi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2t}\,\cos\varphi \\ -\sqrt{2t}\,\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\|n(t,\varphi)\| = \sqrt{2t+1}$$

e abbiamo

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{2t+1}\,dtd\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}\tan^2\varphi} \sqrt{2t+1}\,dt\right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2t+1}\,dt\right) d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}\,(2t+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}\tan^2\varphi} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\,(2t+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}} d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{3\,\cos^3\varphi} - \frac{1}{3}\right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{3}\right) d\varphi =$$

$$= \left[\frac{1}{6}\left(\log\left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) + \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right) - \frac{1}{3}\varphi\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\right)\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\log(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2} + \pi(\sqrt{2}-1)\right)\,.$$