Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito A del 04-06-2019

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq -\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,,\, y \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq 1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{2y-x}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq \frac{x+1}{2}\,,\, x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-1-z^3 = 0\,,\, z \leq 2\right\}$$

i) scrivere una parametrizzazione globale di Σ;

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-1-z^3 \leq 0\,,\, z \leq 2-2x^2-2y^2\right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è differenziabile;

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ si può scrivere come somma della funzione $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ e della composizione delle funzioni $h(t)=\sin t$ e $g(x,y)$. La funzione h è differenziabile su tutto il suo dominio naturale, mentre g è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{x^2+y^2=0\}$. Dunque possiamo concludere dai teoremi di carattere generale che la funzione f è certamente differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{x^2+y^2=0\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Rimane da studiare la differenziabilità in $(0,0)$. Iniziamo studiando l'esistenza delle derivate parziali di f. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|-\sin(|t|)}{t}$$

e usando lo sviluppo $\sin(|t|)=|t|-\frac{1}{6}|t|^3+o(|t|^3)$, troviamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\,.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|-\sin(|t|)}{t}=0\,.$$

Dobbiamo poi vedere se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\,.$$

Sostituendo i valori della funzione e delle sue derivate parziali, si ottiene che dobbiamo studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{6}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3+o((\sqrt{x^2+y^2})^3)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\,.$$

Dunque la funzione f risulta essere differenziabile anche in $(0,0)$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x\ge-\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,,\,y\ge 0\,,\,x^2+y^2\le 1\right\}\,.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

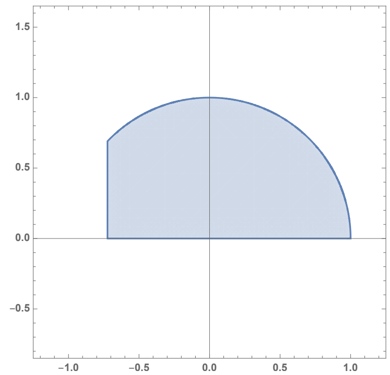

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

Nel punto precedente abbiamo determinato che la funzione f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$. Nei punti $(x, y) \neq (0, 0)$ possiamo calcolare il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \end{pmatrix}$$

da cui si ricava che non ci sono punti critici liberi interni a Ω, poiché $\cos 1 \leq \cos(\sqrt{x^2+y^2}) < 1$ su $\Omega \setminus \{(0, 0)\}$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\pi}{6}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\pi}{6}} \\ \sqrt{1-\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ y = 0\,,\ -\sqrt{\frac{\pi}{6}} \leq x \leq 1 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ x^2 + y^2 = 1\,,\ -\sqrt{\frac{\pi}{6}} \leq x \leq 1 \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ x = -\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-\frac{\pi}{6}} \right\}.$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\ 0)\,, \qquad t \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,,\ 1 \right],$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = |t| - \sin(|t|), \qquad t \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,,\,1\right] .$$

Risulta

$$g_1'(t) = \begin{cases} 1 - \cos t\,, & t \in (0,1) \\ 0\,, & t = 0 \\ -1 + \cos t\,, & t \in (-\sqrt{\frac{\pi}{6}}, 0) \end{cases}$$

e dunque si trova un punto critico per $t = 0$ che corrisponde al punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

L'insieme Γ_2 possiamo parametrizzarlo usando

$$\gamma_2(t) = (\cos t\,,\, \sin t)\,, \qquad t \in [0\,,\, t_0]\ ,$$

dove $S_3 = \gamma_2(t_0)$, e dunque $t_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 1 - \sin(1), \qquad t \in [0\,,\, t_0]\ .$$

Essendo g_2 una funzione costante, tutti i punti di Γ_2 sono punti critici vincolati, e per i valori della funzione possiamo usare gli spigoli S_1 e S_3. (Osserviamo che Γ_2 è parte di un insieme di livello di f).

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,,\, t\right), \qquad t \in \left[0\,,\, \sqrt{1 - \frac{\pi}{6}}\right]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = \sqrt{t^2 + \frac{\pi}{6}} - \sin\left(\sqrt{t^2 + \frac{\pi}{6}}\right), \qquad t \in \left[0\,,\, \sqrt{1 - \frac{\pi}{6}}\right]\ .$$

Risulta $g_3'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{\pi}{6}}} - \frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{\pi}{6}}} \cos\left(\sqrt{t^2 + \frac{\pi}{6}}\right)$, e dunque non si trovano punti critici in $(0\,,\, \sqrt{1 - \frac{\pi}{6}})$.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(Q_1) = 0\,, \quad f(S_1) = f(S_3) = 1 - \sin(1)\,, \quad f(S_2) = \sqrt{\frac{\pi}{6}} - \sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) .$$

Dunque il massimo di f è $1 - \sin(1)$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{2y - x}{x^2 + y^2}\, dxdy$$

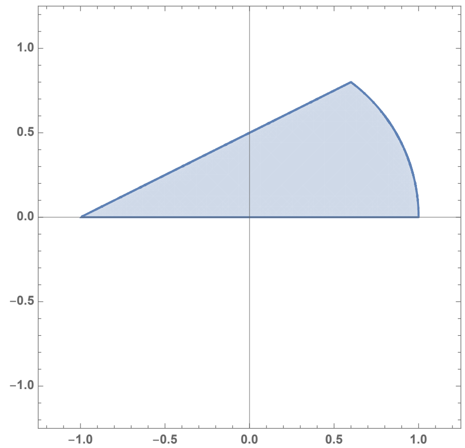

Figure 2: L'insieme Ω.

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le \frac{x+1}{2}\,,\, x^2+y^2 \le 1\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

Per semplificare il calcolo usiamo il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Svolgiamolo con il cambiamento di variabili. Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{2y-x}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_S (2\sin\theta - \cos\theta)\,d\rho d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \,:\, 0 \le \rho\sin\theta \le \frac{\rho\cos\theta + 1}{2}\,,\, \rho^2 \le 1\right\}$$

La prima e la terza condizione ci dicono che

$$\rho \in [0,1] \quad \text{e} \quad \theta \in [0,\pi]\ .$$

La prima, la seconda e la terza condizione per S si riscrivono insieme come

$$\begin{cases} 2\sin\theta - \cos\theta > 0 \\ \theta \in [0,\pi] \\ \rho \le \frac{1}{2\sin\theta - \cos\theta} \\ \rho \in [0,1] \end{cases} \bigcup \begin{cases} 2\sin\theta - \cos\theta < 0 \\ \theta \in [0,\pi] \\ \rho \ge \frac{1}{2\sin\theta - \cos\theta} \\ \rho \in [0,1] \end{cases}$$

da cui troviamo

$$\begin{cases} \theta \in \left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\,\pi\right] \\ \rho \le \frac{1}{2\sin\theta - \cos\theta} \\ \rho \in [0,1] \end{cases} \bigcup \begin{cases} \theta \in \left[0\,,\,\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ \rho \ge \frac{1}{2\sin\theta - \cos\theta} \\ \rho \in [0,1] \end{cases} \tag{1}$$

Chiamando S_1 l'insieme delle soluzioni del primo sottosistema in (1), otteniamo l'insieme rappresentato in figura 3 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per scriverlo come insieme semplice

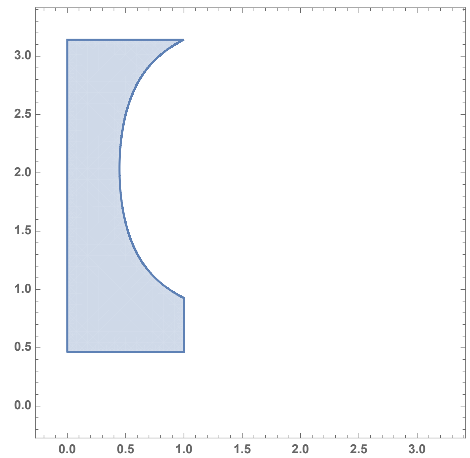

Figure 3: L'insieme S_1.

dobbiamo considerare la soluzione in $(\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}\,, \pi]$ di

$$\frac{1}{2\sin\theta - \cos\theta} = 1$$

che sono $\theta_1 = \arccos \frac{3}{5}$ e $\theta_2 = \pi$. Dunque

$$S_1 = \left\{(\rho,\theta)\ :\ \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} < \theta < \arccos\frac{3}{5}\,,\ 0 \le \rho \le 1\right\} \bigcup \left\{(\rho,\theta)\ :\ \arccos\frac{3}{5} < \theta < \pi\,,\ 0 \le \rho \le \frac{1}{2\sin\theta - \cos\theta}\right\}$$

Chiamando poi S_2 l'insieme delle soluzioni del secondo sottosistema in (1), osservando che $\frac{1}{2\sin\theta - \cos\theta} < 0$ per ogni $\theta \in [0, \arccos \frac{2}{\sqrt{5}})$, si ha che la seconda condizione è sempre verificata. Dunque

$$S_2 = \left\{(\rho,\theta)\ :\ 0 \le \theta < \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\ 0 \le \rho \le 1\right\}$$

In conclusione possiamo dunque scrivere $S = S_1 \cup S_2$ come

$$S = \left\{(\rho,\theta)\ :\ 0 < \theta < \arccos\frac{3}{5}\,,\ 0 \le \rho \le 1\right\} \bigcup \left\{(\rho,\theta)\ :\ \arccos\frac{3}{5} < \theta < \pi\,,\ 0 \le \rho \le \frac{1}{2\sin\theta - \cos\theta}\right\}$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{2y - x}{x^2 + y^2}\, dxdy = \iint_S (2\sin\theta - \cos\theta)\, d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{\arccos\frac{3}{5}} \left(\int_0^1 (2\sin\theta - \cos\theta)\, d\rho\right) d\theta + \int_{\arccos\frac{3}{5}}^{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2\sin\theta - \cos\theta}} (2\sin\theta - \cos\theta)\, d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\arccos\frac{3}{5}} (2\sin\theta - \cos\theta)\, d\theta + \int_{\arccos\frac{3}{5}}^{\pi} 1\, d\theta =$$

$$= \Big(-2\cos\theta - \sin\theta \Big)\Big|_0^{\arccos\frac{3}{5}} + \theta\Big|_{\arccos\frac{3}{5}}^{\pi} = -\frac{6}{5} - \frac{4}{5} + 2 + \pi - \arccos\frac{3}{5} = \pi - \arccos\frac{3}{5}$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-1-z^3 = 0\,,\ z \le 2\big\}$$

i) scrivere una parametrizzazione globale di Σ;

L'insieme Σ si può interpretare come superficie di rotazione o come superficie cartesiana. Nel secondo caso, si tratta del grafico della funzione continua $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^{\frac{1}{3}}$ sull'insieme

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 9\big\}$$

Quindi possiamo scrivere la parametrizzazione globale

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(x,y) = \Big(x\,,\ y\,,\ (x^2+y^2-1)^{\frac{1}{3}}\Big)\,.$$

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-1-z^3 \le 0\,,\ z \le 2-2x^2-2y^2\big\}$$

L'insieme V è rappresentato in figura 4, e si può scrivere come un insieme semplice rispetto a z nella forma

$$V = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in E\,,\ (x^2+y^2-1)^{\frac{1}{3}} \le z \le 2(1-x^2-y^2)\Big\}$$

dove $E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\big\}$. Il volume di V si può quindi calcolare utilizzando la formula

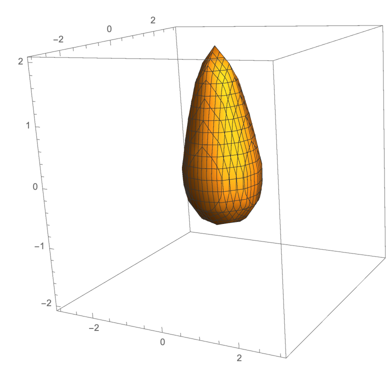

Figure 4: L'insieme V.

di integrazione per fili, da cui

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V 1\,dxdydz = \iint_E \Big(\int_{(x^2+y^2-1)^{\frac{1}{3}}}^{2(1-x^2-y^2)} 1\,dz\Big)\,dxdy =$$

$$= \iint_E \Big(2(1-x^2-y^2) - (x^2+y^2-1)^{\frac{1}{3}}\Big)\,dxdy = \iint_S \Big(2(1-\rho^2) - (\rho^2-1)^{\frac{1}{3}}\Big)\,\rho\,d\rho d\theta$$

dove abbiamo usato il cambiamento di variabili in coordinate polari

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho$$

e abbiamo posto $E = \psi(S)$, e quindi

$$S = \Big\{(\rho,\theta) \in (0,+\infty)\times[0,2\pi]\,:\,\rho^2 \le 1\Big\} = [0,1]\times[0,2\pi]\,.$$

Quindi

$$\mathrm{vol}(V) = \iint_S \Big(2(1-\rho^2) - (\rho^2-1)^{\frac{1}{3}}\Big)\,\rho\,d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \Big(2(1-\rho^2) - (\rho^2-1)^{\frac{1}{3}}\Big)\,\rho\,d\rho\Big)\,d\theta =$$

$$= 2\pi\Big(-\frac{1}{2}(1-\rho^2)^2 - \frac{3}{8}(\rho^2-1)^{\frac{4}{3}}\Big)\Big|_0^1 = 2\pi\Big(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\Big) = \frac{7}{4}\pi\,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito B del 04-06-2019

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+2y^2} - \cos\left(\sqrt{x^2+2y^2}\right)$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \le \sqrt{\frac{\pi}{6}}\,,\, y \ge 0\,,\, x^2+y^2 \le 1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{2y+x}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le \frac{1-x}{2}\,,\, x^2+y^2 \le 1\right\}$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-4-z^3 = 0\,,\, z \le 1\right\}$$

i) scrivere una parametrizzazione globale di Σ;

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-4-z^3 \le 0\,,\, z \le 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2\right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+2y^2}-\cos\left(\sqrt{x^2+2y^2}\right)$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è differenziabile;

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ si può scrivere come somma della funzione $g(x,y)=\sqrt{x^2+2y^2}$ e della composizione delle funzioni $h(t)=\cos t$ e $g(x,y)$. La funzione h è differenziabile su tutto il suo dominio naturale, mentre g è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{x^2+2y^2=0\}$. Dunque possiamo concludere dai teoremi di carattere generale che la funzione f è certamente differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Rimane da studiare la differenziabilità in $(0,0)$. Iniziamo studiando l'esistenza delle derivate parziali di f. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|-\cos(|t|)+1}{t}$$

e usando lo sviluppo $\cos(|t|)=1-\frac{1}{2}|t|^2+o(|t|^2)$, troviamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{|t|+\frac{1}{2}|t|^2+o(|t|^2)}{t}$$

e quindi il limite non esiste.

Si ottiene quindi che la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x\le\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,,\,y\ge 0\,,\,x^2+y^2\le 1\right\}.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 5.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

Nel punto precedente abbiamo determinato che la funzione f è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, dunque prendiamo in considerazione il punto

$$D=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Passando ai punti critici liberi interni, per $(x,y)\ne(0,0)$ possiamo calcolare il gradiente

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}}\sin\left(\sqrt{x^2+2y^2}\right)\\ \frac{2y}{\sqrt{x^2+2y^2}}+\frac{2y}{\sqrt{x^2+2y^2}}\sin\left(\sqrt{x^2+2y^2}\right)\end{pmatrix}$$

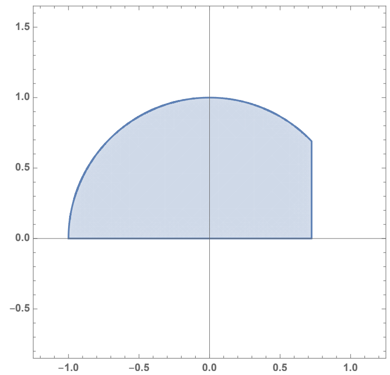

Figure 5: L'insieme Ω.

da cui si ricava che non ci sono punti critici liberi interni a Ω, poiché $0 < \sin(\sqrt{x^2+2y^2}) < \sin\sqrt{2} < \sin 1$ su Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \\ \sqrt{1-\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ y = 0\,,\ -1 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{6}} \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ x^2 + y^2 = 1\,,\ -1 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{6}} \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}\,,\ 0 \le y \le \sqrt{1-\frac{\pi}{6}} \right\}.$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\,0)\,, \qquad t \in \left[-1\,,\,\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right],$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = |t| - \cos(|t|), \qquad t \in \left[-1\,,\,\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right].$$

Risulta che g_1 non è derivabile per $t = 0$, che corrisponde al punto D di non differenziabilità già preso in considerazione, e per $t \neq 0$ si ha

$$g_1'(t) = \begin{cases} 1 + \sin t\,, & t \in (0, \sqrt{\frac{\pi}{6}}) \\ -1 + \sin t\,, & t \in (-1, 0) \end{cases}$$

dunque non si trovano punti critici vincolati.

L'insieme Γ_2 possiamo parametrizzarlo usando

$$\gamma_2(t) = \left(t\,,\ \sqrt{1-t^2}\right), \qquad t \in \left[-1\,,\ \sqrt{\frac{\pi}{6}}\right],$$

de componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \sqrt{2-t^2} - \cos(\sqrt{2-t^2}), \qquad t \in \left[-1\,,\ \sqrt{\frac{\pi}{6}}\right].$$

Risulta $g_2'(t) = -\frac{t}{\sqrt{2-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\sin(\sqrt{2-t^2})$, e dunque in $(-1, \sqrt{\frac{\pi}{6}})$ si trova un punto critico solo per $t = 0$, che corrisponde al punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_2\,(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,,\ t\right), \qquad t \in \left[0\,,\ \sqrt{1-\frac{\pi}{6}}\right],$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = \sqrt{2t^2+\frac{\pi}{6}} - \cos\left(\sqrt{2t^2+\frac{\pi}{6}}\right), \qquad t \in \left[0\,,\ \sqrt{1-\frac{\pi}{6}}\right].$$

Risulta $g_3'(t) = \frac{2t}{\sqrt{2t^2+\frac{\pi}{6}}} + \frac{2t}{\sqrt{2t^2+\frac{\pi}{6}}}\sin\left(\sqrt{2t^2+\frac{\pi}{6}}\right)$, e dunque non si trovano punti critici in $(0\,,\ \sqrt{1-\frac{\pi}{6}})$.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(D) = -1\,, \quad f(Q_1) = \sqrt{2} - \cos(\sqrt{2})\,, \quad f(S_1) = \sqrt{\frac{\pi}{6}} - \cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$f(S_2) = 1 - \cos 1\,, \quad f(S_3) = \sqrt{2-\frac{\pi}{6}} - \cos\left(\sqrt{2-\frac{\pi}{6}}\right)$$

Dunque il massimo di f è $\sqrt{2} - \cos(\sqrt{2})$ e il minimo è -1.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{2y+x}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,:\, 0 \le y \le \frac{1-x}{2}\,,\ x^2+y^2 \le 1\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 6.

Per semplificare il calcolo usiamo il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

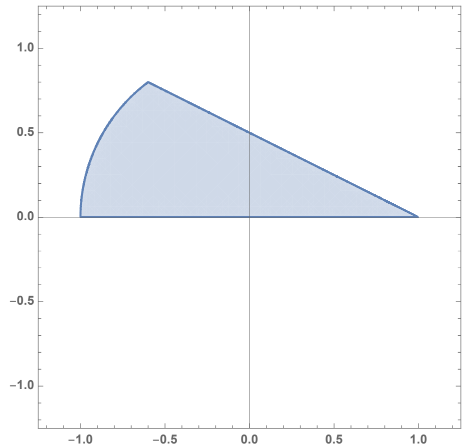

Figure 6: L'insieme Ω.

Svolgiamolo con il cambiamento di variabili. Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{2y+x}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_S (2\sin\theta + \cos\theta)\,d\rho d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty)\times[0,2\pi]\,:\,0 \le \rho\sin\theta \le \frac{1-\rho\cos\theta}{2}\,,\,\rho^2 \le 1\right\}$$

La prima e la terza condizione ci dicono che

$$\rho \in [0,1] \quad \text{e} \quad \theta \in [0,\pi]\ .$$

La prima, la seconda e la terza condizione per S si riscrivono insieme come

$$\begin{cases} 2\sin\theta + \cos\theta > 0 \\ \theta \in [0,\pi] \\ \rho \le \frac{1}{2\sin\theta+\cos\theta} \\ \rho \in [0,1] \end{cases} \bigcup \begin{cases} 2\sin\theta + \cos\theta < 0 \\ \theta \in [0,\pi] \\ \rho \ge \frac{1}{2\sin\theta+\cos\theta} \\ \rho \in [0,1] \end{cases}$$

da cui troviamo

$$\begin{cases} \theta \in \left[0\,,\,\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) \\ \rho \le \frac{1}{2\sin\theta+\cos\theta} \\ \rho \in [0,1] \end{cases} \bigcup \begin{cases} \theta \in \left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\,,\,\pi\right] \\ \rho \ge \frac{1}{2\sin\theta+\cos\theta} \\ \rho \in [0,1] \end{cases} \tag{2}$$

Chiamando S_1 l'insieme delle soluzioni del primo sottosistema in (2), otteniamo l'insieme rappresentato in figura 7 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo considerare la soluzione in $[0, \arccos(-\frac{2}{\sqrt{5}}))$ di

$$\frac{1}{2\sin\theta + \cos\theta} = 1$$

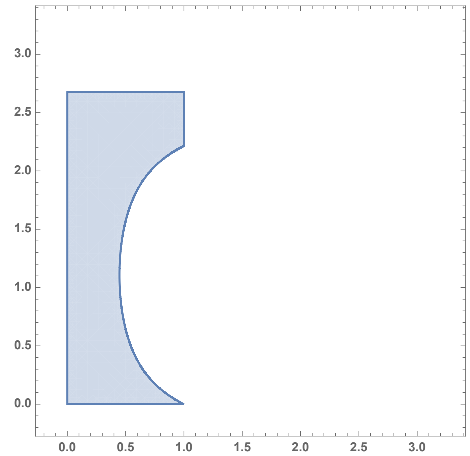

Figure 7: L'insieme S_1.

che sono $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \arccos(-\frac{3}{5})$. Dunque

$$S_1 = \left\{(\rho,\theta)\ :\ 0 < \theta < \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\ ,\ 0 \le \rho \le \frac{1}{2\sin\theta + \cos\theta}\right\} \bigcup$$

$$\bigcup \left\{(\rho,\theta)\ :\ \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) < \theta < \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\ ,\ 0 \le \rho \le 1\right\}$$

Chiamando poi S_2 l'insieme delle soluzioni del secondo sottosistema in (2), osservando che $\frac{1}{2\sin\theta+\cos\theta} < 0$ per ogni $\theta \in (\arccos(-\frac{2}{\sqrt{5}})\,,\,\pi]$, si ha che la seconda condizione è sempre verificata. Dunque

$$S_2 = \left\{(\rho,\theta)\ :\ \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \le \theta < \pi\,,\ 0 \le \rho \le 1\right\}$$

In conclusione possiamo dunque scrivere $S = S_1 \cup S_2$ come

$$S = \left\{(\rho,\theta)\ :\ 0 < \theta < \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\ ,\ 0 \le \rho \le \frac{1}{2\sin\theta + \cos\theta}\right\} \bigcup \left\{(\rho,\theta)\ :\ \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) < \theta < \pi\,,\ 0 \le \rho \le 1\right\}$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{2y + x}{x^2 + y^2}\,dxdy = \iint_S (2\sin\theta + \cos\theta)\,d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)} \left(\int_0^{\frac{1}{2\sin\theta+\cos\theta}} (2\sin\theta + \cos\theta)\,d\rho\right) d\theta + \int_{\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)}^{\pi} \left(\int_0^1 (2\sin\theta + \cos\theta)\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)} 1\,d\theta + \int_{\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)}^{\pi} (2\sin\theta + \cos\theta)\,d\theta =$$

$$= \theta\Big|_0^{\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)} + \Big(-2\cos\theta + \sin\theta\Big)\Big|_{\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)}^{\pi} = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + 2 - \frac{6}{5} - \frac{4}{5} = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-4-z^3 = 0\,,\, z \le 1\right\}$$

i) scrivere una parametrizzazione globale di Σ*;*

L'insieme Σ si può interpretare come superficie di rotazione o come superficie cartesiana. Nel secondo caso, si tratta del grafico della funzione continua $f(x,y) = (x^2+y^2-4)^{\frac{1}{3}}$ sull'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 5\right\}$$

Quindi possiamo scrivere la parametrizzazione globale

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(x,y) = \Big(x\,,\, y\,,\, (x^2+y^2-4)^{\frac{1}{3}}\Big)\,.$$

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-4-z^3 \le 0\,,\, z \le 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2\right\}$$

L'insieme V è rappresentato in figura 8, e si può scrivere come un insieme semplice rispetto a z nella forma

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in E\,,\, (x^2+y^2-4)^{\frac{1}{3}} \le z \le \frac{1}{4}(4-x^2-y^2)\right\}$$

dove $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 4\right\}$. Il volume di V si può quindi calcolare utilizzando la formula

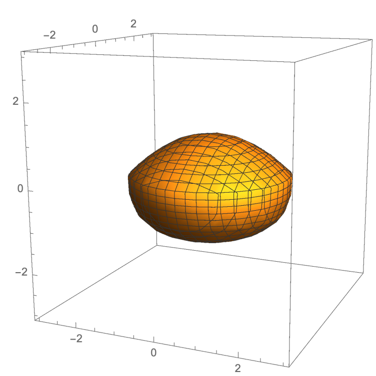

Figure 8: L'insieme V.

di integrazione per fili, da cui

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V 1\, dxdydz = \iint_E \Big(\int_{(x^2+y^2-4)^{\frac{1}{3}}}^{\frac{1}{4}(4-x^2-y^2)} 1\, dz\Big)\, dxdy =$$

$$= \iint_E \Big(\frac{1}{4}(4-x^2-y^2) - (x^2+y^2-4)^{\frac{1}{3}}\Big)\, dxdy = \iint_S \Big(\frac{1}{4}(4-\rho^2) - (\rho^2-4)^{\frac{1}{3}}\Big)\, \rho\, d\rho d\theta$$

dove abbiamo usato il cambiamento di variabili in coordinate polari

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho$$

e abbiamo posto $E = \psi(S)$, e quindi

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in (0,+\infty)\times[0,2\pi]\,:\,\rho^2 \le 2\right\} = [0,2]\times[0,2\pi]\,.$$

Quindi

$$\mathrm{vol}(V) = \iint_S \left(\frac{1}{4}(4-\rho^2) - (\rho^2-4)^{\frac{1}{3}}\right)\rho\, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \left(\frac{1}{4}(4-\rho^2) - (\rho^2-4)^{\frac{1}{3}}\right)\rho\, d\rho\right)d\theta =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{16}(4-\rho^2)^2 - \frac{3}{8}(\rho^2-4)^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_0^2 = 2\pi\left(1 + \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}\right).$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito C del 04-06-2019

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+2y^2} - \cos\left(\sqrt{x^2+2y^2}\right)$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}}\,,\, y \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq 1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{2y+x}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{2}\,,\, x^2+y^2 \leq 1\big\}$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-9-z^3 = 0\,,\, z \leq 1\big\}$$

i) scrivere una parametrizzazione globale di Σ;

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-9-z^3 \leq 0\,,\, z \leq 1 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}y^2\right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. Vedi Esercizio 1 del compito B.

Esercizio 2. Vedi Esercizio 2 del compito B.

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - 9 - z^3 = 0\,,\, z \le 1\right\}$$

i) scrivere una parametrizzazione globale di Σ*;*

L'insieme Σ si può interpretare come superficie di rotazione o come superficie cartesiana. Nel secondo caso, si tratta del grafico della funzione continua $f(x,y) = (x^2+y^2-9)^{\frac{1}{3}}$ sull'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 10\right\}$$

Quindi possiamo scrivere la parametrizzazione globale

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(x,y) = \Big(x\,,\, y\,,\, (x^2+y^2-9)^{\frac{1}{3}}\Big)\,.$$

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - 9 - z^3 \le 0\,,\, z \le 1 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}y^2\right\}$$

L'insieme V è rappresentato in figura 9, e si può scrivere come un insieme semplice rispetto a z nella forma

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in E\,,\, (x^2+y^2-9)^{\frac{1}{3}} \le z \le \frac{1}{9}(9 - x^2 - y^2)\right\}$$

dove $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 9\right\}$. Il volume di V si può quindi calcolare utilizzando la formula di integrazione per fili, da cui

$$\text{vol}(V) = \iiint_V 1\, dxdydz = \iint_E \Big(\int_{(x^2+y^2-9)^{\frac{1}{3}}}^{\frac{1}{9}(9-x^2-y^2)} 1\, dz\Big)\, dxdy =$$

$$= \iint_E \Big(\frac{1}{9}(9 - x^2 - y^2) - (x^2+y^2-9)^{\frac{1}{3}}\Big)\, dxdy = \iint_S \Big(\frac{1}{9}(9-\rho^2) - (\rho^2-9)^{\frac{1}{3}}\Big)\, \rho\, d\rho d\theta$$

dove abbiamo usato il cambiamento di variabili in coordinate polari

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho$$

e abbiamo posto $E = \psi(S)$, e quindi

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi] \,:\, \rho^2 \le 9\right\} = [0,3] \times [0,2\pi]\,.$$

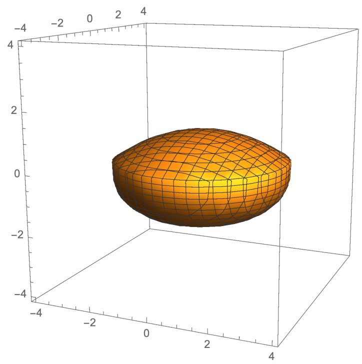

Figure 9: L'insieme V.

Quindi

$$\mathrm{vol}(V) = \iint_S \left(\frac{1}{9}(9-\rho^2) - (\rho^2-9)^{\frac{1}{3}}\right)\rho\, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 \left(\frac{1}{9}(9-\rho^2) - (\rho^2-9)^{\frac{1}{3}}\right)\rho\, d\rho\right) d\theta =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{36}(9-\rho^2)^2 - \frac{3}{8}(\rho^2-9)^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_0^3 = 2\pi \left(\frac{9}{4} + \frac{9}{8}3^{\frac{2}{3}}\right).$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito D del 04-06-2019

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq -\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,,\, y \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{2y-x}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq \frac{x+1}{2}\,,\, x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-1-z^3 = 0\,,\, z \leq 3\right\}$$

i) scrivere una parametrizzazione globale di Σ;

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-1-z^3 \leq 0\,,\, z \leq 3-3x^2-3y^2\right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. Vedi Esercizio 1 del compito A.

Esercizio 2. Vedi Esercizio 2 del compito A.

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-1-z^3 = 0\,,\; z \leq 3\big\}$$

i) scrivere una parametrizzazione globale di Σ;

L'insieme Σ si può interpretare come superficie di rotazione o come superficie cartesiana. Nel secondo caso, si tratta del grafico della funzione continua $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^{\frac{1}{3}}$ sull'insieme

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 28\big\}$$

Quindi possiamo scrivere la parametrizzazione globale

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(x,y) = \Big(x\,,\, y\,,\, (x^2+y^2-1)^{\frac{1}{3}}\Big)\,.$$

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-1-z^3 \leq 0\,,\; z \leq 3-3x^2-3y^2\big\}$$

L'insieme V è rappresentato in figura 10, e si può scrivere come un insieme semplice rispetto a z nella forma

$$V = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in E\,,\; (x^2+y^2-1)^{\frac{1}{3}} \leq z \leq 3(1-x^2-y^2)\Big\}$$

dove $E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\big\}$. Il volume di V si può quindi calcolare utilizzando la formula di integrazione per fili, da cui

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V 1\, dxdydz = \iint_E \Big(\int_{(x^2+y^2-1)^{\frac{1}{3}}}^{3(1-x^2-y^2)} 1\, dz\Big)\, dxdy =$$

$$= \iint_E \Big(3(1-x^2-y^2) - (x^2+y^2-1)^{\frac{1}{3}}\Big)\, dxdy = \iint_S \Big(3(1-\rho^2) - (\rho^2-1)^{\frac{1}{3}}\Big)\, \rho\, d\rho d\theta$$

dove abbiamo usato il cambiamento di variabili in coordinate polari

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho$$

e abbiamo posto $E = \psi(S)$, e quindi

$$S = \big\{(\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi] \,:\, \rho^2 \leq 1\big\} = [0,1] \times [0,2\pi]\,.$$

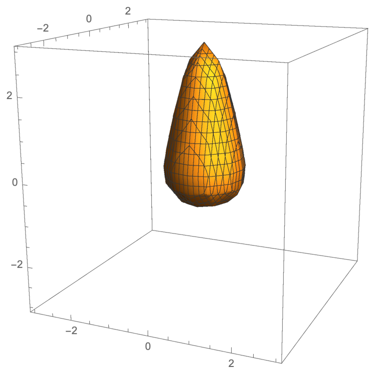

Figure 10: L'insieme V.

Quindi

$$\mathrm{vol}(V) = \iint_S \Big(3(1-\rho^2) - (\rho^2-1)^{\frac{1}{3}}\Big)\,\rho\, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \Big(3(1-\rho^2) - (\rho^2-1)^{\frac{1}{3}}\Big)\,\rho\, d\rho\Big)\, d\theta =$$

$$= 2\pi \Big(-\frac{3}{4}(1-\rho^2)^2 - \frac{3}{8}(\rho^2-1)^{\frac{4}{3}}\Big)\Big|_0^1 = 2\pi \Big(\frac{3}{4} + \frac{3}{8}\Big) = \frac{9}{4}\pi\,.$$