

**Analisi Matematica II**  
**Corso di Ingegneria Biomedica**  
**Compito del 04-06-2012 - A**

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

**Esercizio 1. (15 punti)** Data la funzione

$$f(x, y) = -x + y^2 + \log(x - y)$$

- i) determinare il dominio;
- ii) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;
- iii) trovare massimo e minimo assoluti di  $f$  ristretta all'insieme  $D$  dato dalla parte interna al triangolo di vertici  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$  e  $(2, 1)$ .

**Esercizio 2. (18 punti)** Data la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = \sin(\pi z)\}$$

- i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P = (0, 1, \frac{1}{2})$ ;
- ii) dire se esiste il piano tangente a  $\Sigma$  in tutti i suoi punti;
- iii) calcolare il volume del solido

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq \sin(\pi z)\}$$

- iv) calcolare il flusso uscente da  $\Sigma$  per il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ \frac{1}{x^2 + (z+1)^2} \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

**Analisi Matematica II**  
**Corso di Ingegneria Biomedica**  
**Compito del 04-06-2012 - B**

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

**Esercizio 1. (15 punti)** Data la funzione

$$f(x, y) = x + y^2 - 2\sqrt{x - y}$$

- i) determinare il dominio;
- ii) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;
- iii) trovare massimo e minimo assoluti di  $f$  ristretta all'insieme  $D$  dato dalla parte interna al triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ .

**Esercizio 2. (18 punti)** Data la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = 4z(1 - z)\}$$

- i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P = (1, 0, \frac{1}{2})$ ;
- ii) dire se esiste il piano tangente a  $\Sigma$  in tutti i suoi punti;
- iii) calcolare il volume del solido

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 4z(1 - z)\}$$

- iv) calcolare il flusso uscente da  $\Sigma$  per il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2 + (z+1)^2} \\ x^2 \\ y + z \end{pmatrix}$$

**Analisi Matematica II**  
**Corso di Ingegneria Biomedica**  
**Compito del 04-06-2012 - C**

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

**Esercizio 1. (15 punti)** Data la funzione

$$f(x, y) = x + y^2 + \log(y - x)$$

- i) determinare il dominio;
- ii) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;
- iii) trovare massimo e minimo assoluti di  $f$  ristretta all'insieme  $D$  dato dalla parte interna al triangolo di vertici  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  e  $(1, 2)$ .

**Esercizio 2. (18 punti)** Data la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) \right\}$$

- i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ;
- ii) dire se esiste il piano tangente a  $\Sigma$  in tutti i suoi punti;
- iii) calcolare il volume del solido

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) \right\}$$

- iv) calcolare il flusso uscente da  $\Sigma$  per il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2 + (z-2)^2} \\ y + z \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

**Analisi Matematica II**  
**Corso di Ingegneria Biomedica**  
**Compito del 04-06-2012 - D**

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

**Esercizio 1. (15 punti)** Data la funzione

$$f(x, y) = -x + y^2 - 2\sqrt{y-x}$$

- i) determinare il dominio;
- ii) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;
- iii) trovare massimo e minimo assoluti di  $f$  ristretta all'insieme  $D$  dato dalla parte interna al triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 1)$ .

**Esercizio 2. (18 punti)** Data la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 = z(2-z)\}$$

- i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ ;
- ii) dire se esiste il piano tangente a  $\Sigma$  in tutti i suoi punti;
- iii) calcolare il volume del solido

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq z(2-z)\}$$

- iv) calcolare il flusso uscente da  $\Sigma$  per il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ \frac{1}{x^2 + (z-3)^2} \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

## Svolgimento

**Esercizio 1 - A.** Data la funzione

$$f(x, y) = -x + y^2 + \log(x - y)$$

i) determinare il dominio;

Il dominio della funzione è l'insieme

$$\text{Dominio} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$$

che è il semipiano aperto sotto la bisettrice del primo e terzo quadrante.

ii) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

Cerchiamo innanzitutto i punti nel dominio che annullano il gradiente. Si trova

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{x-y} \\ 2y - \frac{1}{x-y} \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo  $\nabla f = 0$ , si trova che l'unico punto critico libero è

$$P = \left( \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

che si trova nel dominio. (Per risolvere il sistema  $\nabla f = 0$  si osserva che la prima equazione implica  $\frac{1}{x-y} = 1$ , che sostituito nella seconda implica  $2y - 1 = 0$ . A questo punto la conclusione è immediata.)

Per caratterizzare  $P$  possiamo usare la matrice Hessiana di  $f$ , che è una matrice simmetrica perché  $f$  è almeno di classe  $C^2$  sul dominio, essendo composizione di funzioni almeno di classe  $C^2$ . La matrice Hessiana di  $f$  è data da

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x-y)^2} & \frac{1}{(x-y)^2} \\ \frac{1}{(x-y)^2} & 2 - \frac{1}{(x-y)^2} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si osserva che  $\det(H_f(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})) = -2$ , per cui  $P$  è un punto di sella.

iii) trovare massimo e minimo assoluti di  $f$  ristretta all'insieme  $D$  dato dalla parte interna al triangolo di vertici  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$  e  $(2, 1)$ .

Dobbiamo prendere in considerazione i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a  $D$ , sui punti critici vincolati al bordo di  $D$ , e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

Non ci sono punti critici liberi interni a  $D$ , infatti  $P$  del punto precedente si trova su un lato di  $D$ . Inoltre la funzione è differenziabile in  $D$ .

Per studiare i punti critici vincolati al bordo di  $D$ , dividiamo il bordo in tre parti e usiamo le parametrizzazioni

$$\gamma_1(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

Componiamo con  $f$  e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = -(1+t) + \log(1+t), \quad t \in [0, 1]$$

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = -2 + t^2 + \log(2-t) \quad t \in [0, 1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = -(1+t) + t^2 \quad t \in [0, 1]$$

e le studiamo separatamente.

La funzione  $g_1$  ha derivata  $g_1'(t) = -1 + \frac{1}{1+t} < 0$  per  $t \in (0, 1)$ , e quindi non ha punti critici in  $(0, 1)$  e i suoi valori di massimo e minimo sono assunti agli estremi dell'intervallo. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_1 = \gamma_1(0) = (1, 0), \quad Q_2 = \gamma_1(1) = (2, 0)$$

La funzione  $g_2$  ha derivata  $g_2'(t) = 2t - \frac{1}{2-t}$  che nell'intervallo  $(0, 1)$  si annulla solo in  $t_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ , che studiando la derivata seconda di  $g_2$  si capisce essere un minimo locale. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_3 = \gamma_2(0) = (2, 0), \quad Q_4 = \gamma_2(t_2) = \left(2, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad Q_5 = \gamma_2(1) = (2, 1)$$

ed, essendo  $t_2$  un minimo locale sappiamo che  $f(Q_4) \leq f(Q_3)$  e  $f(Q_4) \leq f(Q_5)$ .

La funzione  $g_3$  ha derivata  $g_3'(t) = 2t - 1$  che nell'intervallo  $(0, 1)$  si annulla solo in  $t_3 = \frac{1}{2}$ , che studiando la derivata seconda di  $g_3$  si capisce essere un minimo locale. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_6 = \gamma_3(0) = (1, 0), \quad Q_7 = \gamma_3(t_3) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad Q_8 = \gamma_3(1) = (2, 1)$$

ed, essendo  $t_3$  un minimo locale sappiamo che  $f(Q_7) \leq f(Q_6)$  e  $f(Q_7) \leq f(Q_8)$ .

Quindi dobbiamo confrontare i valori

$$f(Q_1) = f(Q_6) = -1, \quad f(Q_2) = f(Q_3) = -2 + \log 2, \quad f(Q_4) = -\frac{1}{2} - \sqrt{2} + \log \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f(Q_5) = f(Q_8) = -1, \quad f(Q_7) = -\frac{5}{4}$$

Da quanto visto prima, per il massimo di  $f$  dobbiamo confrontare solo  $f(Q_1), f(Q_2), f(Q_3), f(Q_5), f(Q_6)$  e  $f(Q_7)$ . Da cui, essendo

$$-2 + \log 2 < -1 \Leftrightarrow \log 2 < 1 \Leftrightarrow 2 < e$$

concludiamo

$$\max_D f = -1$$

Per il minimo di  $f$  dobbiamo invece confrontare  $f(Q_4)$  ed  $f(Q_7)$ . Da quanto visto prima sappiamo che

$$f(Q_3) = -2 + \log 2 \geq f(Q_4)$$

Inoltre

$$f(Q_7) = -\frac{5}{4} > f(Q_3)$$

poiché

$$\log 2 < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \log 16 < \log e^3 \Leftrightarrow 16 < e^3$$

(cosa che si ottiene usando ad esempio  $e^3 > (2, 7)^3 = 19, 683$ ). Quindi concludiamo che

$$\min_D f = -\frac{1}{2} - \sqrt{2} + \log\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

**Esercizio 1 - B.** *Data la funzione*

$$f(x, y) = x + y^2 - 2\sqrt{x-y}$$

i) *determinare il dominio;*

Il dominio della funzione è l'insieme

$$\text{Dominio} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \geq 0\}$$

che è il semipiano chiuso sotto la bisettrice del primo e terzo quadrante.

ii) *trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;*

Cerchiamo innanzitutto i punti nel dominio che annullano il gradiente. Si trova

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{x-y}} \\ 2y + \frac{1}{\sqrt{x-y}} \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo  $\nabla f = 0$ , si trova che l'unico punto critico libero è

$$P = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

che si trova nel dominio. (Per risolvere il sistema  $\nabla f = 0$  si osserva che la prima equazione implica  $\frac{1}{\sqrt{x-y}} = 1$ , che sostituito nella seconda implica  $2y + 1 = 0$ . A questo punto la conclusione è immediata.)

Per caratterizzare  $P$  possiamo usare la matrice Hessiana di  $f$ , che è una matrice simmetrica perché  $f$  è almeno di classe  $C^2$  su  $\{x - y > 0\}$ , essendo composizione di funzioni almeno di classe  $C^2$ . La matrice Hessiana di  $f$  è data da

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(\sqrt{x-y})^3} & -\frac{1}{2(\sqrt{x-y})^3} \\ -\frac{1}{2(\sqrt{x-y})^3} & 2 + \frac{1}{2(\sqrt{x-y})^3} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Si osserva che  $\det(H_f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})) = 1$  e  $\text{traccia}(H_f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})) = 3 > 0$ , per cui entrambi gli autovalori sono positivi e quindi  $P$  è un punto di minimo locale.

iii) *trovare massimo e minimo assoluti di  $f$  ristretta all'insieme  $D$  dato dalla parte interna al triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ .*

Dobbiamo prendere in considerazione i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a  $D$ , sui punti critici vincolati al bordo di  $D$ , e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

Non ci sono punti critici liberi interni a  $D$ , infatti  $P$  del punto precedente è esterno a  $D$ . Inoltre la funzione è differenziabile nella parte interna a  $D$ .

Per studiare i punti critici vincolati al bordo di  $D$ , dividiamo il bordo in tre parti e usiamo le parametrizzazioni

$$\gamma_1(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

Componiamo con  $f$  e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t - 2\sqrt{t}, \quad t \in [0, 1]$$

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 1 + t^2 - 2\sqrt{1-t} \quad t \in [0, 1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = t + t^2 \quad t \in [0, 1]$$

e le studiamo separatamente.

La funzione  $g_1$  ha derivata  $g_1'(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} < 0$  per  $t \in (0, 1)$ , e quindi non ha punti critici in  $(0, 1)$  e i suoi valori di massimo e minimo sono assunti agli estremi dell'intervallo. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_1 = \gamma_1(0) = (0, 0), \quad Q_2 = \gamma_1(1) = (1, 0)$$

La funzione  $g_2$  ha derivata  $g_2'(t) = 2t + \frac{1}{\sqrt{1-t}} > 0$  per  $t \in (0, 1)$ , e quindi non ha punti critici in  $(0, 1)$  e i suoi valori di massimo e minimo sono assunti agli estremi dell'intervallo. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_3 = \gamma_2(0) = (1, 0), \quad Q_4 = \gamma_2(1) = (1, 1)$$

La funzione  $g_3$  ha derivata  $g_3'(t) = 1 + 2t > 0$  per  $t \in (0, 1)$ , e quindi non ha punti critici in  $(0, 1)$  e i suoi valori di massimo e minimo sono assunti agli estremi dell'intervallo. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_5 = \gamma_3(0) = (0, 0), \quad Q_6 = \gamma_3(1) = (1, 1)$$

Quindi dobbiamo confrontare i valori

$$f(Q_1) = f(Q_5) = 0, \quad f(Q_2) = f(Q_3) = -1, \quad f(Q_4) = f(Q_6) = 2$$

e concludiamo

$$\max_D f = 2, \quad \min_D f = -1$$

**Esercizio 1 - C.** Data la funzione

$$f(x, y) = x + y^2 + \log(y - x)$$

i) determinare il dominio;

Il dominio della funzione è l'insieme

$$\text{Dominio} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x > 0\}$$

che è il semipiano aperto sopra la bisettrice del primo e terzo quadrante.

ii) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;



Cerchiamo innanzitutto i punti nel dominio che annullano il gradiente. Si trova

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{y-x} \\ 2y + \frac{1}{y-x} \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo  $\nabla f = 0$ , si trova che l'unico punto critico libero è

$$P = \left( -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

che si trova nel dominio. (Per risolvere il sistema  $\nabla f = 0$  si osserva che la prima equazione implica  $\frac{1}{y-x} = 1$ , che sostituito nella seconda implica  $2y + 1 = 0$ . A questo punto la conclusione è immediata.)

Per caratterizzare  $P$  possiamo usare la matrice Hessiana di  $f$ , che è una matrice simmetrica perché  $f$  è almeno di classe  $C^2$  sul dominio, essendo composizione di funzioni almeno di classe  $C^2$ . La matrice Hessiana di  $f$  è data da

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(y-x)^2} & \frac{1}{(y-x)^2} \\ \frac{1}{(y-x)^2} & 2 - \frac{1}{(y-x)^2} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f \left( -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si osserva che  $\det(H_f(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})) = -2$ , per cui  $P$  è un punto di sella.

iii) trovare massimo e minimo assoluti di  $f$  ristretta all'insieme  $D$  dato dalla parte interna al triangolo di vertici  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  e  $(1, 2)$ .

Dobbiamo prendere in considerazione i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a  $D$ , sui punti critici vincolati al bordo di  $D$ , e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

Non ci sono punti critici liberi interni a  $D$ , infatti  $P$  del punto precedente è esterno a  $D$ . Inoltre la funzione è differenziabile in  $D$ .

Per studiare i punti critici vincolati al bordo di  $D$ , dividiamo il bordo in tre parti e usiamo le parametrizzazioni

$$\gamma_1(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

Componiamo con  $f$  e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = (1+t)^2 + \log(1+t), \quad t \in [0, 1]$$

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = t + 4 + \log(2-t) \quad t \in [0, 1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = t + (1+t)^2 \quad t \in [0, 1]$$

e le studiamo separatamente.

La funzione  $g_1$  ha derivata  $g_1'(t) = 2(1+t) + \frac{1}{1+t} > 0$  per  $t \in (0, 1)$ , e quindi non ha punti critici in  $(0, 1)$  e i suoi valori di massimo e minimo sono assunti agli estremi dell'intervallo. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_1 = \gamma_1(0) = (0, 1), \quad Q_2 = \gamma_1(1) = (0, 2)$$

La funzione  $g_2$  ha derivata  $g_2'(t) = 1 - \frac{1}{2-t} > 0$  per  $t \in (0, 1)$ , e quindi non ha punti critici in  $(0, 1)$  e i suoi valori di massimo e minimo sono assunti agli estremi dell'intervallo. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_3 = \gamma_2(0) = (0, 2), \quad Q_4 = \gamma_2(1) = (1, 2)$$

La funzione  $g_3$  ha derivata  $g_3'(t) = 1 + 2(1+t) > 0$  per  $t \in (0, 1)$ , e quindi non ha punti critici in  $(0, 1)$  e i suoi valori di massimo e minimo sono assunti agli estremi dell'intervallo. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_5 = \gamma_3(0) = (0, 1), \quad Q_6 = \gamma_3(1) = (1, 2)$$

Quindi dobbiamo confrontare i valori

$$f(Q_1) = f(Q_5) = 1, \quad f(Q_2) = f(Q_3) = 4 + \log 2, \quad f(Q_4) = f(Q_6) = 5$$

e concludiamo

$$\max_D f = 5, \quad \min_D f = 1$$

essendo  $0 < \log 2 < 1$ .

**Esercizio 1 - D.** Data la funzione

$$f(x, y) = -x + y^2 - 2\sqrt{y-x}$$

i) determinare il dominio;

Il dominio della funzione è l'insieme

$$\text{Dominio} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \geq 0\}$$

che è il semipiano chiuso sopra la bisettrice del primo e terzo quadrante.

ii) trovare tutti i punti critici liberi e dire se si tratta di punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

Cerchiamo innanzitutto i punti nel dominio che annullano il gradiente. Si trova

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{\sqrt{y-x}} \\ 2y - \frac{1}{\sqrt{y-x}} \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo  $\nabla f = 0$ , si trova che l'unico punto critico libero è

$$P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

che si trova nel dominio. (Per risolvere il sistema  $\nabla f = 0$  si osserva che la prima equazione implica  $\frac{1}{\sqrt{y-x}} = 1$ , che sostituito nella seconda implica  $2y - 1 = 0$ . A questo punto la conclusione è immediata.)

Per caratterizzare  $P$  possiamo usare la matrice Hessiana di  $f$ , che è una matrice simmetrica perché  $f$  è almeno di classe  $C^2$  su  $\{y - x > 0\}$ , essendo composizione di funzioni almeno di classe  $C^2$ . La matrice Hessiana di  $f$  è data da

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(\sqrt{y-x})^3} & -\frac{1}{2(\sqrt{y-x})^3} \\ -\frac{1}{2(\sqrt{y-x})^3} & 2 + \frac{1}{2(\sqrt{y-x})^3} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Si osserva che  $\det(H_f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = 1$  e  $\text{traccia}(H_f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = 3 > 0$ , per cui entrambi gli autovalori sono positivi e quindi  $P$  è un punto di minimo locale.

iii) trovare massimo e minimo assoluti di  $f$  ristretta all'insieme  $D$  dato dalla parte interna al triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 1)$ .

Dobbiamo prendere in considerazione i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a  $D$ , sui punti critici vincolati al bordo di  $D$ , e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

Non ci sono punti critici liberi interni a  $D$ , infatti  $P$  del punto precedente è esterno a  $D$ . Inoltre la funzione è differenziabile nella parte interna a  $D$ .

Per studiare i punti critici vincolati al bordo di  $D$ , dividiamo il bordo in tre parti e usiamo le parametrizzazioni

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, & t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) &= (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, & t \in [0, 1] \\ \gamma_3(t) &= (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, & t \in [0, 1]\end{aligned}$$

Componiamo con  $f$  e otteniamo le funzioni di una variabile

$$\begin{aligned}g_1(t) &= f(\gamma_1(t)) = t^2 - 2\sqrt{t}, & t \in [0, 1] \\ g_2(t) &= f(\gamma_2(t)) = -t + 1 - 2\sqrt{1-t} & t \in [0, 1] \\ g_3(t) &= f(\gamma_3(t)) = -t + t^2 & t \in [0, 1]\end{aligned}$$

e le studiamo separatamente.

La funzione  $g_1$  ha derivata  $g_1'(t) = 2t - \frac{1}{\sqrt{t}}$  che nell'intervallo  $(0, 1)$  si annulla solo in  $t_1 = 2^{-\frac{2}{3}}$ , che studiando la derivata seconda di  $g_1$  si capisce essere un minimo locale. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_1 = \gamma_1(0) = (0, 0), \quad Q_2 = \gamma_1(t_1) = \left(0, 2^{-\frac{2}{3}}\right), \quad Q_3 = \gamma_1(1) = (0, 1)$$

ed, essendo  $t_1$  un minimo locale sappiamo che  $f(Q_2) \leq f(Q_1)$  e  $f(Q_2) \leq f(Q_3)$ .

La funzione  $g_2$  ha derivata  $g_2'(t) = -1 + \frac{1}{\sqrt{1-t}} > 0$  per  $t \in (0, 1)$ , e quindi non ha punti critici in  $(0, 1)$  e i suoi valori di massimo e minimo sono assunti agli estremi dell'intervallo. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_4 = \gamma_2(0) = (0, 1), \quad Q_5 = \gamma_2(1) = (1, 1)$$

La funzione  $g_3$  ha derivata  $g_3'(t) = -1 + 2t$  che nell'intervallo  $(0, 1)$  si annulla solo in  $t_3 = \frac{1}{2}$ . Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_6 = \gamma_3(0) = (0, 0), \quad Q_7 = \gamma_3(t_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad Q_8 = \gamma_3(1) = (1, 1)$$

Quindi dobbiamo confrontare i valori

$$\begin{aligned}f(Q_1) = f(Q_6) = 0, \quad f(Q_2) = 2^{-\frac{4}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}, \quad f(Q_3) = f(Q_4) = -1 \\ f(Q_5) = f(Q_8) = 0, \quad f(Q_7) = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Da quanto visto prima, per il massimo di  $f$  dobbiamo confrontare solo  $f(Q_1), f(Q_3), f(Q_5)$  ed  $f(Q_7)$ . Da cui concludiamo

$$\max_D f = 0$$

Per il minimo di  $f$  dobbiamo invece confrontare  $f(Q_2)$ ,  $f(Q_5)$  ed  $f(Q_7)$ . Da cui, essendo  $f(Q_7) > f(Q_3) \geq f(Q_2)$ , concludiamo

$$\min_D f = 2^{-\frac{4}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}$$

**Esercizio 2 - A.** Data la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = \sin(\pi z)\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P = (0, 1, \frac{1}{2})$ ;

Consideriamo  $\Sigma$  come l'insieme di livello della funzione  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - \sin(\pi z)$ . Si trova

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -\pi \cos(\pi z) \end{pmatrix}$$

Quindi in particolare

$$\nabla F(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Possiamo quindi considerare  $\nabla F(P)$  il vettore normale a  $\Sigma$  in  $P$  e l'equazione cartesiana del piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P$  si scrive quindi

$$0 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 1) + 0 \cdot (z - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Alternativamente si poteva parametrizzare  $\Sigma$  come superficie di rotazione tramite

$$\sigma(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\sin(\pi t)} \cos \varphi \\ \sqrt{\sin(\pi t)} \sin \varphi \\ t \end{pmatrix}$$

con  $P = \sigma(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Il vettore normale  $\vec{n}$  in  $P$  si poteva allora trovare tramite

$$\vec{n}(P) = \sigma_t \left( \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \wedge \sigma_\varphi \left( \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

e concludere come sopra.

ii) dire se esiste il piano tangente a  $\Sigma$  in tutti i suoi punti;

Ragionando come sopra basta dimostrare che  $\nabla F(x, y, z) \neq 0$  per ogni  $(x, y, z) \in \Sigma$ . Il sistema  $\nabla F(x, y, z) = 0$  ha come soluzione i punti della forma  $(0, 0, \frac{1}{2} + k)$ , per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ . Ma si verifica facilmente che nessuno di questi punti appartiene a  $\Sigma$ .

Alternativamente, usando la parametrizzazione di sopra bisogna dimostrare che il vettore normale non si annulla. Si trova che  $\vec{n} = 0$  per  $t = 0, 1$  e  $\varphi$  qualsiasi, che corrispondono ai punti  $(0, 0, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . Questi punti, non regolari per la parametrizzazione di prima, vanno trattati a parte con una nuova parametrizzazione ad esempio come grafico di funzioni.

iii) calcolare il volume del solido

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq \sin(\pi z)\}$$

L'insieme  $U$  è la parte interna alla superficie  $\Sigma$  e quindi è un solido di rotazione. Allora la cosa più conveniente è usare le coordinate cilindriche. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x(\rho, \varphi, t) = \rho \cos \varphi \\ y(\rho, \varphi, t) = \rho \sin \varphi \\ z(\rho, \varphi, t) = t \end{cases}$$

e ricordiamo che  $|\det J_\psi| = \rho$ . Sostituendo nelle condizioni per  $U$  troviamo l'insieme

$$\begin{aligned} D &= \{(\rho, \varphi, t) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1, \rho^2 \leq \sin(\pi t)\} = \\ &= \{(\rho, \varphi, t) : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq \rho \leq \sqrt{\sin(\pi t)}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \end{aligned}$$

Quindi il calcolo del volume di  $U$  diventa

$$\begin{aligned} \text{Volume}(U) &= \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz = \iiint_D \rho \, d\rho d\varphi dt = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{\sin(\pi t)}} \rho \, d\rho \right) d\varphi \right) dt = \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin(\pi t) \, d\varphi \right) dt = \pi \int_0^1 \sin(\pi t) \, dt = 2 \end{aligned}$$

iv) calcolare il flusso uscente da  $\Sigma$  per il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ \frac{1}{x^2 + (z+1)^2} \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Possiamo applicare il Teorema della Divergenza se valgono le seguenti condizioni (le ipotesi del teorema): il campo deve essere differenziabile; la superficie deve essere chiusa, regolare e orientabile; la parte interna  $U$  alla superficie deve essere contenuta nel dominio del campo.

Verifichiamo le condizioni nel nostro caso. Innanzitutto ci dobbiamo convincere che  $\Sigma$  sia chiusa. Essendo una superficie di rotazione non è difficile disegnarla (anche approssimativamente), ottenendo

Il campo  $\mathbf{F}$  ha dominio  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, -1)\}$ , ed è differenziabile su  $\Omega$  perché le sue componenti si ottengono come composizione di funzioni differenziabili. Tralasciamo le ipotesi di regolarità e di orientabilità di  $\Sigma$ , che diamo per buone. Infine bisogna verificare che  $U \subset \Omega$ . Per far questo basta notare che  $U \subset \{z \geq 0\}$ .

Applichiamo quindi il Teorema della Divergenza e concludiamo che

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{F}) = \iiint_U \text{div}(\mathbf{F}) \, dx dy dz = \iiint_U 1 \, dx dy dz = \text{Volume}(U) = 2$$

come calcolato al punto precedente. Abbiamo usato

$$\text{div}(\mathbf{F})(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1$$

**Esercizio 2 - B.** Data la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = 4z(1 - z)\}$$

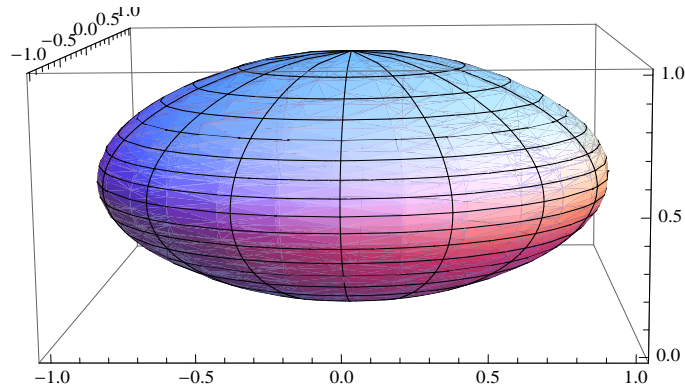


Figure 1: La superficie  $\Sigma$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P = (1, 0, \frac{1}{2})$ ;

Consideriamo  $\Sigma$  come l'insieme di livello della funzione  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z(1 - z)$ . Si trova

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 8z - 4 \end{pmatrix}$$

Quindi in particolare

$$\nabla F(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Possiamo quindi considerare  $\nabla F(P)$  il vettore normale a  $\Sigma$  in  $P$  e l'equazione cartesiana del piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P$  si scrive quindi

$$2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Alternativamente si poteva parametrizzare  $\Sigma$  come ellissoide di centro  $(0, 0, \frac{1}{2})$  e semiassi  $1, 1, \frac{1}{2}$ , oppure come superficie di rotazione tramite

$$\sigma(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{4t(1-t)} \cos \varphi \\ \sqrt{4t(1-t)} \sin \varphi \\ t \end{pmatrix}$$

con  $P = \sigma(\frac{1}{2}, 0)$ . Il vettore normale  $\vec{n}$  in  $P$  si poteva allora trovare tramite

$$\vec{n}(P) = \sigma_t \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \wedge \sigma_\varphi \left( \frac{1}{2}, 0 \right)$$

e concludere come sopra.

ii) dire se esiste il piano tangente a  $\Sigma$  in tutti i suoi punti;

Ragionando come sopra basta dimostrare che  $\nabla F(x, y, z) \neq 0$  per ogni  $(x, y, z) \in \Sigma$ . Il sistema  $\nabla F(x, y, z) = 0$  ha come soluzione il punto  $(0, 0, \frac{1}{2})$  che si verifica facilmente non appartenere a  $\Sigma$ .

Alternativamente, si poteva usare la parametrizzazione (vedi es. 2-A).

iii) calcolare il volume del solido

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 4z(1-z)\}$$

L'insieme  $U$  è la parte interna alla superficie  $\Sigma$  e quindi è un solido di rotazione. Allora la cosa più conveniente è usare le coordinate cilindriche. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x(\rho, \varphi, t) = \rho \cos \varphi \\ y(\rho, \varphi, t) = \rho \sin \varphi \\ z(\rho, \varphi, t) = t \end{cases}$$

e ricordiamo che  $|\det J_\psi| = \rho$ . Sostituendo nelle condizioni per  $U$  troviamo l'insieme

$$\begin{aligned} D &= \{(\rho, \varphi, t) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1, \rho^2 \leq 4t(1-t)\} = \\ &= \{(\rho, \varphi, t) : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq \rho \leq \sqrt{4t(1-t)}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \end{aligned}$$

Quindi il calcolo del volume di  $U$  diventa

$$\begin{aligned} \text{Volume}(U) &= \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz = \iiint_D \rho \, d\rho d\varphi dt = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{4t(1-t)}} \rho \, d\rho \right) d\varphi \right) dt = \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} 4t(1-t) \, d\varphi \right) dt = \pi \int_0^1 4t(1-t) \, dt = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

iv) calcolare il flusso uscente da  $\Sigma$  per il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2 + (z+1)^2} \\ x^2 \\ y + z \end{pmatrix}$$

Possiamo applicare il Teorema della Divergenza se valgono le seguenti condizioni (le ipotesi del teorema): il campo deve essere differenziabile; la superficie deve essere chiusa, regolare e orientabile; la parte interna  $U$  alla superficie deve essere contenuta nel dominio del campo.

Verifichiamo le condizioni nel nostro caso. Innanzitutto ci dobbiamo convincere che  $\Sigma$  sia chiusa. Essendo una superficie di rotazione non è difficile disegnarla (anche approssimativamente), ottenendo

Il campo  $\mathbf{F}$  ha dominio  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, -1)\}$ , ed è differenziabile su  $\Omega$  perché le sue componenti si ottengono come composizione di funzioni differenziabili. Tralasciamo le ipotesi di regolarità e di orientabilità di  $\Sigma$ , che diamo per buone. Infine bisogna verificare che  $U \subset \Omega$ . Per far questo basta notare che  $U \subset \{z \geq 0\}$ .

Applichiamo quindi il Teorema della Divergenza e concludiamo che

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{F}) = \iiint_U \text{div}(\mathbf{F}) \, dx dy dz = \iiint_U 1 \, dx dy dz = \text{Volume}(U) = \frac{2}{3}\pi$$

come calcolato al punto precedente. Abbiamo usato

$$\text{div}(\mathbf{F})(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1$$

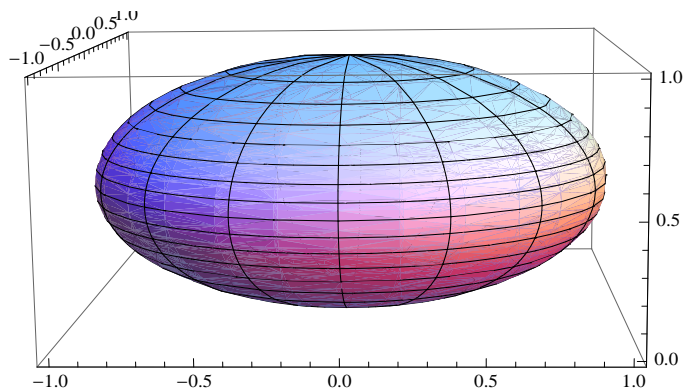


Figure 2: La superficie  $\Sigma$

**Esercizio 2 - C.** Data la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) \right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ;

Consideriamo  $\Sigma$  come l'insieme di livello della funzione  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ . Si trova

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) \end{pmatrix}$$

Quindi in particolare

$$\nabla F(P) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Possiamo quindi considerare  $\nabla F(P)$  il vettore normale a  $\Sigma$  in  $P$  e l'equazione cartesiana del piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P$  si scrive quindi

$$\sqrt{2} \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} \cdot \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot (z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + y = \sqrt{2}$$

Alternativamente si poteva parametrizzare  $\Sigma$  come superficie di rotazione tramite

$$\sigma(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \cos \varphi \\ \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \sin \varphi \\ t \end{pmatrix}$$

con  $P = \sigma\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ . Il vettore normale  $\vec{n}$  in  $P$  si poteva allora trovare tramite

$$\vec{n}(P) = \sigma_t\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \wedge \sigma_\varphi\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

e concludere come sopra.



ii) dire se esiste il piano tangente a  $\Sigma$  in tutti i suoi punti;

Ragionando come sopra basta dimostrare che  $\nabla F(x, y, z) \neq 0$  per ogni  $(x, y, z) \in \Sigma$ . Il sistema  $\nabla F(x, y, z) = 0$  ha come soluzione i punti della forma  $(0, 0, 2k)$ , per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ . Ma si verifica facilmente che nessuno di questi punti appartiene a  $\Sigma$ .

Alternativamente, si poteva usare la parametrizzazione (vedi es. 2-A).

iii) calcolare il volume del solido

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) \right\}$$

L'insieme  $U$  è la parte interna alla superficie  $\Sigma$  e quindi è un solido di rotazione. Allora la cosa più conveniente è usare le coordinate cilindriche. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x(\rho, \varphi, t) = \rho \cos \varphi \\ y(\rho, \varphi, t) = \rho \sin \varphi \\ z(\rho, \varphi, t) = t \end{cases}$$

e ricordiamo che  $|\det J_\psi| = \rho$ . Sostituendo nelle condizioni per  $U$  troviamo l'insieme

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (\rho, \varphi, t) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} : -1 \leq t \leq 1, \rho^2 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right\} = \\ &= \left\{ (\rho, \varphi, t) : -1 \leq t \leq 1, 0 \leq \rho \leq \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\} \end{aligned}$$

Quindi il calcolo del volume di  $U$  diventa

$$\begin{aligned} \text{Volume}(U) &= \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz = \iiint_D \rho \, d\rho d\varphi dt = \int_{-1}^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}t)}} \rho \, d\rho \right) d\varphi \right) dt = \\ &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) d\varphi \right) dt = \pi \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = 4 \end{aligned}$$

iv) calcolare il flusso uscente da  $\Sigma$  per il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2 + (z-2)^2} \\ y + z \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Possiamo applicare il Teorema della Divergenza se valgono le seguenti condizioni (le ipotesi del teorema): il campo deve essere differenziabile; la superficie deve essere chiusa, regolare e orientabile; la parte interna  $U$  alla superficie deve essere contenuta nel dominio del campo.

Verifichiamo le condizioni nel nostro caso. Innanzitutto ci dobbiamo convincere che  $\Sigma$  sia chiusa. Essendo una superficie di rotazione non è difficile disegnarla (anche approssimativamente), ottenendo

Il campo  $\mathbf{F}$  ha dominio  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 2)\}$ , ed è differenziabile su  $\Omega$  perché le sue componenti si ottengono come composizione di funzioni differenziabili. Tralasciamo le ipotesi di regolarità e di orientabilità di  $\Sigma$ , che diamo per buone. Infine bisogna verificare che  $U \subset \Omega$ . Per far questo basta notare che  $U \subset \{z \leq 1\}$ .

Applichiamo quindi il Teorema della Divergenza e concludiamo che

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{F}) = \iiint_U \text{div}(\mathbf{F}) \, dx dy dz = \iiint_U 1 \, dx dy dz = \text{Volume}(U) = 4$$

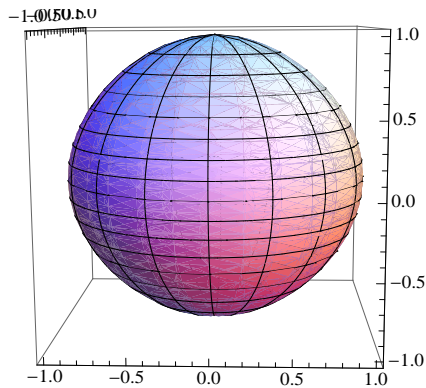


Figure 3: La superficie  $\Sigma$

come calcolato al punto precedente. Abbiamo usato

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1$$

**Esercizio 2 - D.** Data la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 = z(2 - z)\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ ;

Consideriamo  $\Sigma$  come l'insieme di livello della funzione  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z(2 - z)$ . Si trova

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z - 2 \end{pmatrix}$$

Quindi in particolare

$$\nabla F(P) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Possiamo quindi considerare  $\nabla F(P)$  il vettore normale a  $\Sigma$  in  $P$  e l'equazione cartesiana del piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P$  si scrive quindi

$$\sqrt{2} \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} \cdot \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot (z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y = \sqrt{2}$$

Alternativamente si poteva parametrizzare  $\Sigma$  come sfera di centro  $(0, 0, 1)$  e raggio 1, oppure come superficie di rotazione tramite

$$\sigma(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{t(2-t)} \cos \varphi \\ \sqrt{t(2-t)} \sin \varphi \\ t \end{pmatrix}$$

con  $P = \sigma\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ . Il vettore normale  $\vec{n}$  in  $P$  si poteva allora trovare tramite

$$\vec{n}(P) = \sigma_t\left(1, \frac{\pi}{4}\right) \wedge \sigma_\varphi\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$$

e concludere come sopra.

ii) dire se esiste il piano tangente a  $\Sigma$  in tutti i suoi punti;

Ragionando come sopra basta dimostrare che  $\nabla F(x, y, z) \neq 0$  per ogni  $(x, y, z) \in \Sigma$ . Il sistema  $\nabla F(x, y, z) = 0$  ha come soluzione il punto  $(0, 0, 1)$  che si verifica facilmente non appartenere a  $\Sigma$ .

Alternativamente, si poteva usare la parametrizzazione (vedi es. 2-A).

iii) calcolare il volume del solido

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq z(2 - z)\}$$

L'insieme  $U$  è la parte interna alla superficie  $\Sigma$  e quindi è un solido di rotazione. Allora la cosa più conveniente è usare le coordinate cilindriche. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x(\rho, \varphi, t) = \rho \cos \varphi \\ y(\rho, \varphi, t) = \rho \sin \varphi \\ z(\rho, \varphi, t) = t \end{cases}$$

e ricordiamo che  $|\det J_\psi| = \rho$ . Sostituendo nelle condizioni per  $U$  troviamo l'insieme

$$\begin{aligned} D &= \{(\rho, \varphi, t) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 2, \rho^2 \leq t(2 - t)\} = \\ &= \{(\rho, \varphi, t) : 0 \leq t \leq 2, 0 \leq \rho \leq \sqrt{t(2 - t)}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \end{aligned}$$

Quindi il calcolo del volume di  $U$  diventa

$$\begin{aligned} \text{Volume}(U) &= \iiint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_D \rho \, d\rho \, d\varphi \, dt = \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{t(2-t)}} \rho \, d\rho \right) d\varphi \right) dt = \\ &= \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} t(2 - t) \, d\varphi \right) dt = \pi \int_0^2 t(2 - t) \, dt = \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

come si poteva concludere se si vedeva  $U$  come interno alla sfera di raggio 1.

iv) calcolare il flusso uscente da  $\Sigma$  per il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ \frac{1}{x^2 + (z-3)^2} \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Possiamo applicare il Teorema della Divergenza se valgono le seguenti condizioni (le ipotesi del teorema): il campo deve essere differenziabile; la superficie deve essere chiusa, regolare e orientabile; la parte interna  $U$  alla superficie deve essere contenuta nel dominio del campo.

Verifichiamo le condizioni nel nostro caso. Innanzitutto ci dobbiamo convincere che  $\Sigma$  sia chiusa. Essendo una superficie di rotazione non è difficile disegnarla (anche approssimativamente), ottenendo la sfera di  $(0, 0, 1)$  e raggio 1.

Il campo  $\mathbf{F}$  ha dominio  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 3)\}$ , ed è differenziabile su  $\Omega$  perché le sue componenti si ottengono come composizione di funzioni differenziabili. Tralasciamo le ipotesi di regolarità e di orientabilità di  $\Sigma$ , che diamo per buone. Infine bisogna verificare che  $U \subset \Omega$ . Per far questo basta notare che  $U \subset \{z \leq 2\}$ .

Applichiamo quindi il Teorema della Divergenza e concludiamo che

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{F}) = \iiint_U \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dx dy dz = \iiint_U 1 \, dx dy dz = \operatorname{Volume}(U) = \frac{4}{3}\pi$$

come calcolato al punto precedente. Abbiamo usato

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1$$