

Calcolo delle Probabilità e Statistica
Corso di Laurea in Informatica
Compito del 04-02-2022

Esercizio 1. (8 punti)

In un grande ospedale, i malati di polmonite vengono trattati per $2/3$ con farmaci tradizionali, e per il restante $1/3$ con farmaci di nuova formulazione: la scelta della medicina di vecchio o nuovo tipo viene effettuata casualmente (rispettando le proporzioni sopra indicate) e non è riportata sulla cartella clinica.

Si sa da precedenti esperienze che per i malati trattati con medicine tradizionali vi è scomparsa dei sintomi entro 4 giorni con probabilità 0.36 ; mentre risulta che globalmente i malati di quell'ospedale presentano scomparsa dei sintomi entro 4 giorni con probabilità 0.41 .

- a) Ricavare con quale probabilità i malati trattati con i nuovi farmaci presentano scomparsa dei sintomi entro 4 giorni.
- b) Selezionando un malato i cui sintomi siano scomparsi entro 4 giorni, è più probabile che sia stato trattato con farmaci tradizionali o con farmaci di nuova formulazione?

Esercizio 2. (12 punti)

Si consideri la funzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ x^2 - 1 & \text{per } a \leq x < b \\ 1 & \text{per } x \geq b \end{cases}$$

dove a e b sono due parametri reali, con $a < b$.

- a) Per quali coppie di valori (a, b) la funzione F risulta una funzione di ripartizione? E per quali valori di a e b la funzione F risulta una funzione di ripartizione di una variabile aleatoria con densità?
- b) Prese 90 variabili aleatorie X_1, \dots, X_{90} indipendenti, equidistribuite, e con densità, aventi la F di sopra come funzione di ripartizione, approssimare la probabilità $\mathbf{P}\{X_1 + \dots + X_{90} \geq 108\}$.

Esercizio 3. (10 punti)

Uno stilista commissiona delle scarpe ad una ditta artigianale e chiede che la varianza delle lunghezze delle scarpe di un dato numero, misurata in centimetri, non superi 0.1. Vengono misurate accuratamente 41 scarpe prodotte e si ottiene una varianza campionaria eguale a 0.145.

- a) Supponendo che le lunghezze delle scarpe possano essere rappresentate con variabili aleatorie gaussiane, si può accettare al livello 0.05 l'ipotesi

$$H_0) \sigma^2 \leq 0.1 \quad \text{contro} \quad H_1) \sigma^2 > 0.1 ?$$

Senza calcolarlo, cosa possiamo concludere sul p -value?

- b) Considerando lo stesso campione, per quali valori della varianza campionaria l'ipotesi del punto (a) sarebbe accettata al livello 0.1?

Esercizio 3 per programma precedente. (10 punti)

Consideriamo la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ identificata dalla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

- a) Descrivere le probabilità invarianti.
- b) Qual è la probabilità di trovarsi al tempo 2 nello stato 1 oppure nello stato 2, partendo dallo stato 1 al tempo 0?