**Analisi Matematica II**
**Corso di Ingegneria Biomedica**
**Compito A del 01-07-2010**

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

**Esercizio 1. (14 punti)** Per la funzione

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y-x}{xy+x+y}\right)$$

i) determinare il dominio e trovare estremo superiore ed inferiore;

ii) trovare tutti i punti critici liberi e caratterizzarli come punti di massimo o minimo locale, o selle;

iii) dire se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

**Esercizio 2. (10 punti)** Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = 1-z,\ 0 \le z \le 1\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo;

ii) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

iii) calcolare il volume dell'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \le 1-z,\ 0 \le z \le 1\right\}$$

**Esercizio 3. (10 punti)** Dire quali dei seguenti campi di vettori in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$ sono irrotazionali e conservativi, e scrivere un potenziale per quelli conservativi:

$$\mathbf{F}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ \log(1+y^2) \\ -x \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}_2(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \sin y \\ e^x \cos y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y-z}{y^2+z^2} \\ \frac{y+z}{y^2+z^2} \end{pmatrix}$$

## Svolgimento - A

**Esercizio 1.** Per la funzione

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y-x}{xy+x+y}\right)$$

i) determinare il dominio e trovare estremo superiore ed inferiore;

Il dominio della funzione è l'insieme

$$\text{Dominio} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy+x+y \neq 0\right\}$$

che è il complementare del grafico della funzione $y(x) = -\frac{x}{x+1}$ disegnato nella figura 1

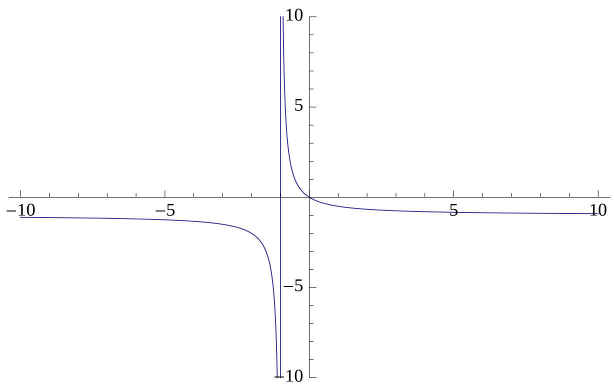


Figure 1: Il complementare del dominio di $f$

Per determinare estremo superiore ed inferiore osserviamo prima che

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}, \qquad \inf_{t\in\mathbb{R}} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$$

Poi, se scegliamo $(x_0, y_0)$ in modo che $x_0y_0 + x_0 + y_0 = 0$ e $y_0 > x_0$ (ad esempio $(-\frac{1}{2}, 1)$) si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\, xy+x+y>0} f(x,y) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\, xy+x+y<0} f(x,y) = -\frac{\pi}{2}$$

quindi

$$\sup_{(x,y)\in\text{Dominio}} f(x,y) = \frac{\pi}{2}, \qquad \inf_{(x,y)\in\text{Dominio}} f(x,y) = -\frac{\pi}{2}.$$

ii) trovare tutti i punti critici liberi e caratterizzarli come punti di massimo o minimo locale, o selle;

Bisogna trovare i punti nel dominio che annullano il gradiente. Intanto si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y(y+2)}{x^2y^2+2x^2y+2xy^2+2x^2+2y^2} \\ \frac{x(x+2)}{x^2y^2+2x^2y+2xy^2+2x^2+2y^2} \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$ si ottengono quattro punti

$$(0,0), \ (0,-2)\,, \ (-2,0)\,, \ (-2,-2)$$

che annullano i numeratori. Imponendo che i punti siano nel dominio restano ammissibili solo due punti

$$P_1 = (0, -2),\ P_2 = (-2, 0)$$

che sono quindi tutti i punti critici liberi di $f$.

Per caratterizzarli possiamo usare la matrice Hessiana di $f$, che è una matrice simmetrica perché $f$ è almeno di classe $C^2$ sul dominio, essendo composizione di funzioni almeno di classe $C^2$. La matrice Hessiana di $f$ è data da

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y(y+2)(xy^2+2xy+y^2+2x)}{(x^2y^2+2x^2y+2xy^2+2x^2+2y^2)^2} & \frac{4(xy^2-x^2y-x^2+y^2)}{(x^2y^2+2x^2y+2xy^2+2x^2+2y^2)^2} \\ \frac{4(xy^2-x^2y-x^2+y^2)}{(x^2y^2+2x^2y+2xy^2+2x^2+2y^2)^2} & -\frac{2x(x+2)(x^2y+2xy+x^2+2y)}{(x^2y^2+2x^2y+2xy^2+2x^2+2y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(0,-2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \qquad H_f(-2,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

per cui sia $P_1$ che $P_2$ sono punti di sella.

iii) dire se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Controlliamo innanzitutto se il limite esiste ed è uguale per tutte le rette della forma $y = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Calcoliamo quindi

$$\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x) = \lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{x(\lambda-1)}{x(\lambda+1)+\lambda x^2}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)$$

Abbiamo trovato che il limite esiste ma dipende dalla retta scelta, quindi non può esistere $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

**Esercizio 2.** Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2 = 1-z,\ 0 \le z \le 1\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo;

Insiemi della forma $\left\{x^2+y^2 = [f(z)]^2,\ a \le z \le b\right\}$ sono superfici di rotazione che si ottengono facendo ruotare intorno all'asse $z$ il grafico della funzione $y = f(z)$ con $z \in [a,b]$. In questo caso $f(z) = \sqrt{1-z}$ e $z \in [0,1]$. Si ottiene quindi la superficie nella figura 2, che è un tronco di paraboloide.

ii) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

Dobbiamo calcolare le componenti del vettore $\vec{n}$ normale alla superficie in $P$. Possiamo usare il Corollario del Teorema delle Funzioni Implicite se la funzione $g(x,y,z) = x^2+y^2+z-1$ ha gradiente non nullo in $P$. Si trova

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad \nabla g(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Allora poniamo $\vec{n} = \nabla g(P)$ e quindi si trova l'equazione cartesiana per il piano tangente

$$1\,(x-\frac{1}{2}) + 1\,(y-\frac{1}{2}) + 1\,(z-\frac{1}{2}) = 0$$

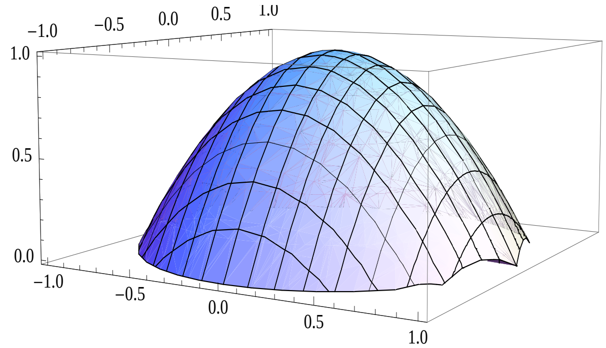


Figure 2: La superficie $\Sigma$

che semplificata diventa

$$x + y + z = \frac{3}{2}$$

iii) calcolare il volume dell'insieme

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 - z, \ 0 \leq z \leq 1\right\}$$

L'insieme $\Omega$ è la parte interna alla superficie $\Sigma$ e quindi è un solido di rotazione. Allora la cosa più conveniente è usare le coordinate cilindriche. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x(\rho, \theta, u) = \rho \cos\theta \\ y(\rho, \theta, u) = \rho \sin\theta \\ z(\rho, \theta, u) = u \end{cases}$$

e ricordiamo che $|\mathrm{det} J_\sigma| = \rho$. Sostituendo nelle condizioni per $\Omega$ troviamo l'insieme aperto

$$D = \left\{(\rho, \theta, u) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \ : \ \rho^2 < 1 - u, \ 0 < u < 1\right\} =$$

$$= \left\{(\rho, \theta, u) \ : \ 0 < \rho < \sqrt{1-u}, \ 0 < \theta < 2\pi, \ 0 < u < 1\right\}$$

Quindi il calcolo del volume di $\Omega$ diventa

$$\mathrm{Volume}(\Omega) = \iiint_\Omega 1 \, dxdydz = \iiint_D \rho \, d\rho d\theta du = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{1-u}} \rho \, d\rho \right) d\theta \right) du =$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1-u) \, d\theta \right) du = \pi \int_0^1 (1-u) \, du = \frac{\pi}{2}$$

**Esercizio 3. (10 punti)** Dire quali dei seguenti campi di vettori in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$ sono irrotazionali e conservativi, e scrivere un potenziale per quelli conservativi:

$$\mathbf{F}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ \log(1 + y^2) \\ -x \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}_2(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \sin y \\ e^x \cos y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y-z}{y^2+z^2} \\ \frac{y+z}{y^2+z^2} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{F}_1$. Essendo un campo di vettori in $\mathbb{R}^3$ si ha

$$rot(\mathbf{F}_1) := \nabla \times \mathbf{F}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - (-1) \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

quindi $\mathbf{F}_1$ non è irrotazionale e di conseguenza non è conservativo.

$\mathbf{F}_2$. Essendo un campo di vettori in $\mathbb{R}^2$ si ha

$$rot(\mathbf{F}_2) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$$

Quindi $\mathbf{F}_2$ è irrotazionale. Studiando il dominio si trova che $\mathbf{F}_2$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$, che è un insieme semplicemente connesso. Quindi per il Lemma di Poincaré il campo $\mathbf{F}_2$ è anche conservativo. Cerchiamo un potenziale. Fissiamo il punto $P_0 = (0, 0)$ e un punto generico $P = (x, y)$. Scegliamo la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ con

$$\gamma_1(t) = (tx, 0) \qquad t \in [0, 1] \qquad \text{e} \qquad \gamma_2(t) = (x, ty) \qquad t \in [0, 1]$$

per cui

$$\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

e poniamo

$$f(x, y) = L(\mathbf{F}_2, \gamma) = L(\mathbf{F}_2, \gamma_1) + L(\mathbf{F}_2, \gamma_2)$$

Si ha

$$L(\mathbf{F}_2, \gamma_1) = \int_0^1 \left(e^{tx} \sin 0\right) x \, dt = 0$$

$$L(\mathbf{F}_2, \gamma_2) = \int_0^1 (e^x \cos(ty)) \; y \; dt = e^x \sin(ty)\Big|_{t=0}^{t=1} = e^x \sin y$$

e dunque

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

che è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, è un potenziale.

$\mathbf{F}_3$. Essendo un campo di vettori in $\mathbb{R}^3$ si ha

$$rot(\mathbf{F}_3) := \nabla \times \mathbf{F}_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{y+z}{y^2+z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y-z}{y^2+z^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

quindi $\mathbf{F}_3$ è irrotazionale. Il suo dominio è l'aperto

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \; : \; y = z = 0\}$$

che non è semplicemente connesso, in quanto si tratta di $\mathbb{R}^3$ meno l'asse $x$. Una circonferenza di centro il "buco" di $\Omega$ e contenuta nel dominio di $\mathbf{F}_3$ è allora una qualsiasi circonferenza che abbia centro sull'asse $x$ e non intersechi l'asse $x$. Per semplicità scegliamo la circonferenza di raggio 1

$$\gamma(t) = (0, \; \cos t, \; \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e calcoliamo $L(\mathbf{F}_3, \gamma)$. Applicando la definizione di lavoro otteniamo

$$L(\mathbf{F}_3, \gamma) = \int_0^{2\pi} (0 + (\cos t - \sin t)\,(-\sin t) + (\cos t + \sin t)\,(\cos t)) \; dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \neq 0$$

dunque $\mathbf{F}_3$ non è conservativo.

**Analisi Matematica II**
**Corso di Ingegneria Biomedica**
**Compito B del 01-07-2010**

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

**Esercizio 1. (14 punti)** Per la funzione

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y-x}{xy-x-y}\right)$$

i) determinare il dominio e trovare estremo superiore ed inferiore;

ii) trovare tutti i punti critici liberi e caratterizzarli come punti di massimo o minimo locale, o selle;

iii) dire se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

**Esercizio 2. (10 punti)** Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = 1+z,\ 0\le z\le 1\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo;

ii) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$;

iii) calcolare il volume dell'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \le 1+z,\ 0\le z\le 1\right\}$$

**Esercizio 3. (10 punti)** Dire quali dei seguenti campi di vettori in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$ sono irrotazionali e conservativi, e scrivere un potenziale per quelli conservativi:

$$\mathbf{F}_1(x,y) = \begin{pmatrix} -(y^2+1)\,\sin x \\ 2y\,\cos x \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y-z}{y^2+z^2} \\ \frac{y+z}{y^2+z^2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin x \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

**Svolgimento - B**

**Esercizio 1.** Per la funzione
$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y-x}{xy-x-y}\right)$$

i) determinare il dominio e trovare estremo superiore ed inferiore;

Il dominio della funzione è l'insieme
$$\text{Dominio} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy - x - y \neq 0\right\}$$

che è il complementare del grafico della funzione $y(x) = \frac{x}{x-1}$ disegnato nella figura 3

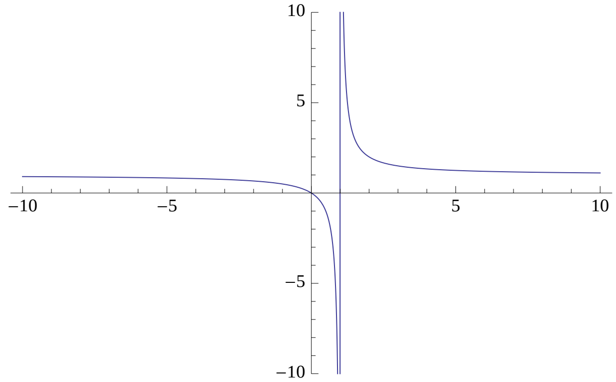


Figure 3: Il complementare del dominio di $f$

Per determinare estremo superiore ed inferiore osserviamo prima che
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}, \qquad \inf_{t\in\mathbb{R}} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$$

Poi, se scegliamo $(x_0, y_0)$ in modo che $x_0y_0 - x_0 - y_0 = 0$ e $y_0 > x_0$ (ad esempio $(\frac{3}{2}, 3)$) si ha
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\, xy-x-y>0} f(x,y) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\, xy-x-y<0} f(x,y) = -\frac{\pi}{2}$$

quindi
$$\sup_{(x,y)\in\text{Dominio}} f(x,y) = \frac{\pi}{2}, \qquad \inf_{(x,y)\in\text{Dominio}} f(x,y) = -\frac{\pi}{2}.$$

ii) trovare tutti i punti critici liberi e caratterizzarli come punti di massimo o minimo locale, o selle;

Bisogna trovare i punti nel dominio che annullano il gradiente. Intanto si trova
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y(y-2)}{x^2y^2-2x^2y-2xy^2+2x^2+2y^2} \\ \frac{x(x-2)}{x^2y^2-2x^2y-2xy^2+2x^2+2y^2} \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$ si ottengono quattro punti
$$(0,0),\ (0,2)\,,\ (2,0)\,,\ (2,2)$$

che annullano i numeratori. Imponendo che i punti siano nel dominio restano ammissibili solo due punti

$$P_1 = (0,2),\ P_2 = (2,0)$$

che sono quindi tutti i punti critici liberi di $f$.

Per caratterizzarli possiamo usare la matrice Hessiana di $f$, che è una matrice simmetrica perché $f$ è almeno di classe $C^2$ sul dominio, essendo composizione di funzioni almeno di classe $C^2$. La matrice Hessiana di $f$ è data da

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y(y-2)(xy^2-2xy-y^2+2x)}{(x^2y^2-2x^2y-2xy^2+2x^2+2y^2)^2} & \frac{4(-xy^2+x^2y-x^2+y^2)}{(x^2y^2-2x^2y-2xy^2+2x^2+2y^2)^2} \\ \frac{4(-xy^2+x^2y-x^2+y^2)}{(x^2y^2-2x^2y-2xy^2+2x^2+2y^2)^2} & -\frac{2x(x-2)(x^2y-2xy-x^2+2y)}{(x^2y^2-2x^2y-2xy^2+2x^2+2y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \qquad H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

per cui sia $P_1$ che $P_2$ sono punti di sella.

iii) dire se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Controlliamo innanzitutto se il limite esiste ed è uguale per tutte le rette della forma $y = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Calcoliamo quindi

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{x(\lambda-1)}{x(-\lambda-1)+\lambda x^2}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda-1}{-\lambda-1}\right)$$

Abbiamo trovato che il limite esiste ma dipende dalla retta scelta, quindi non può esistere $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

**Esercizio 2.** Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = 1+z,\ 0 \le z \le 1\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo;

Insiemi della forma $\left\{x^2+y^2 = [f(z)]^2,\ a \le z \le b\right\}$ sono superfici di rotazione che si ottengono facendo ruotare intorno all'asse $z$ il grafico della funzione $y = f(z)$ con $z \in [a,b]$. In questo caso $f(z) = \sqrt{1+z}$ e $z \in [0,1]$. Si ottiene quindi la superficie nella figura 4, che è un tronco di paraboloide.

ii) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$;

Dobbiamo calcolare le componenti del vettore $\vec{n}$ normale alla superficie in $P$. Possiamo usare il Corollario del Teorema delle Funzioni Implicite se la funzione $g(x,y,z) = x^2+y^2-z-1$ ha gradiente non nullo in $P$. Si trova

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad \nabla g(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Allora poniamo $\vec{n} = \nabla g(P)$ e quindi si trova l'equazione cartesiana per il piano tangente

$$2\,(x-1) + 1\,(y-\frac{1}{2}) - 1\,(z-\frac{1}{4}) = 0$$

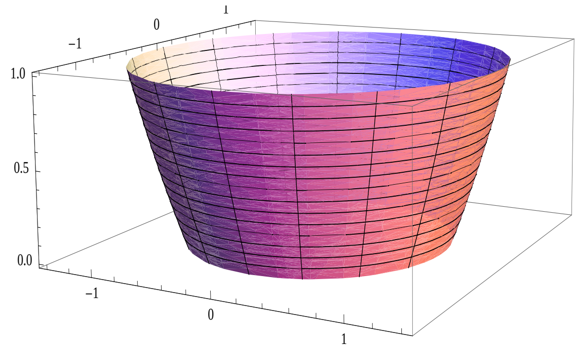


Figure 4: La superficie $\Sigma$

che semplificata diventa

$$2x + y - z = -\frac{9}{4}$$

iii) calcolare il volume dell'insieme

$$\Omega = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \le 1 + z, \ 0 \le z \le 1\big\}$$

L'insieme $\Omega$ è la parte interna alla superficie $\Sigma$ e quindi è un solido di rotazione. Allora la cosa più conveniente è usare le coordinate cilindriche. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x(\rho, \theta, u) = \rho\,\cos\theta \\ y(\rho, \theta, u) = \rho\,\sin\theta \\ z(\rho, \theta, u) = u \end{cases}$$

e ricordiamo che $|\det J_\sigma| = \rho$. Sostituendo nelle condizioni per $\Omega$ troviamo l'insieme aperto

$$D = \big\{(\rho, \theta, u) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \ : \ \rho^2 < 1 + u, \ 0 < u < 1\big\} =$$

$$= \big\{(\rho, \theta, u) \ : \ 0 < \rho < \sqrt{1+u}, \ 0 < \theta < 2\pi, \ 0 < u < 1\big\}$$

Quindi il calcolo del volume di $\Omega$ diventa

$$\text{Volume}(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dxdydz = \iiint_D \rho\,d\rho d\theta du = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{1+u}} \rho\,d\rho \right) d\theta \right) du =$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,(1+u)\,d\theta \right) du = \pi \int_0^1 (1+u)\,du = \frac{3}{2}\pi$$

**Esercizio 3. (10 punti)** Dire quali dei seguenti campi di vettori in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$ sono irrotazionali e conservativi, e scrivere un potenziale per quelli conservativi:

$$\mathbf{F}_1(x, y) = \begin{pmatrix} -(y^2+1)\,\sin x \\ 2y\,\cos x \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y-z}{y^2+z^2} \\ \frac{y+z}{y^2+z^2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin x \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

$\mathbf{F}_1$. Essendo un campo di vettori in $\mathbb{R}^2$ si ha

$$rot(\mathbf{F}_1) = -2y, \sin x + 2y \sin x = 0$$

Quindi $\mathbf{F}_1$ è irrotazionale. Studiando il dominio si trova che $\mathbf{F}_1$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$, che è un insieme semplicemente connesso. Quindi per il Lemma di Poincaré il campo $\mathbf{F}_1$ è anche conservativo. Cerchiamo un potenziale. Fissiamo il punto $P_0 = (0,0)$ e un punto generico $P = (x,y)$. Scegliamo la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ con

$$\gamma_1(t) = (tx, 0) \qquad t \in [0,1] \qquad \text{e} \qquad \gamma_2(t) = (x, ty) \qquad t \in [0,1]$$

per cui

$$\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

e poniamo

$$f(x,y) = L(\mathbf{F}_1, \gamma) = L(\mathbf{F}_1, \gamma_1) + L(\mathbf{F}_1, \gamma_2)$$

Si ha

$$L(\mathbf{F}_1, \gamma_1) = \int_0^1 (-\sin(tx))\ x\ dt = \cos(tx)\Big|_{t=0}^{t=1} = \cos x - 1$$

$$L(\mathbf{F}_1, \gamma_2) = \int_0^1 (2ty\ \cos x)\ y\ dt = t^2\, y^2\ \cos x\Big|_{t=0}^{t=1} = y^2\ \cos x$$

e dunque

$$f(x,y) = (y^2 + 1)\ \cos x - 1$$

che è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, è un potenziale.

$\mathbf{F}_2$. Essendo un campo di vettori in $\mathbb{R}^3$ si ha

$$rot(\mathbf{F}_2) := \nabla \times \mathbf{F}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{y+z}{y^2+z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y-z}{y^2+z^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

quindi $\mathbf{F}_2$ è irrotazionale. Il suo dominio è l'aperto

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z)\ :\ y = z = 0\}$$

che non è semplicemente connesso, in quanto si tratta di $\mathbb{R}^3$ meno l'asse $x$. Una circonferenza di centro il "buco" di $\Omega$ e contenuta nel dominio di $\mathbf{F}_2$ è allora una qualsiasi circonferenza che abbia centro sull'asse $x$ e non intersechi l'asse $x$. Per semplicità scegliamo la circonferenza di raggio 1

$$\gamma(t) = (0,\ \cos t,\ \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e calcoliamo $L(\mathbf{F}_2, \gamma)$. Applicando la definizione di lavoro otteniamo

$$L(\mathbf{F}_2, \gamma) = \int_0^{2\pi} (0 + (\cos t - \sin t)\,(-\sin t) + (\cos t + \sin t)\,(\cos t))\ dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0$$

dunque $\mathbf{F}_2$ non è conservativo.

$\mathbf{F}_3$. Essendo un campo di vettori in $\mathbb{R}^3$ si ha

$$rot(\mathbf{F}_3) := \nabla \times \mathbf{F}_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

quindi $\mathbf{F}_3$ non è irrotazionale e di conseguenza non è conservativo.