Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \log(x - \log x)$ determinandone insieme di definizione, estremi superiore e inferiore o eventualmente massimo e minimo, punti di massimo e di minimo locali e asintoti (compresi quelli obliqui). Dimostrare inoltre che la funzione ha almeno un cambio di convessità.

Soluzione

La funzione è definita se $x > 0$ e $x - \log x > 0$. Per quanto riguarda la seconda disuguaglianza osserviamo che la funzione logaritmo è concava, quindi il suo grafico sta sotto le sue rette tangenti. Calcolando la tangente nel punto $x = 1$ si ottiene che

$$\log x \leq 0 + 1(x - 1) = x - 1 < x$$

quindi $x - \log x > 0$ per ogni $x > 0$. L'insieme di definizione di f risulta quindi essere $(0, \infty)$. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \log(0^+ - \log(0^+)) = \log(0^+ - (-\infty)) = \log(\infty) = \infty,$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \log\left(x\left(1 - \frac{\log x}{x}\right)\right) = \log(x(1 - 0)) = \infty$$

dove si è sfruttato il limite notevole $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ facilmente ottenibile con il teorema di de L'Hôpital.

La funzione quindi ha un asintoto verticale destro di equazione $x = 0$, non ha massimo e il suo estremo superiore è ∞. Non ci sono asintoti orizzontali ma ci potrebbe essere un asintoto obliquo. Per calcolare il limite $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ osserviamo che, se x è abbastanza grande (ad esempio $x \geq 1$), risulta $\log x \geq 0$, quindi, dalla monotonia della funzione logaritmo si ottiene

$$0 \leq \frac{\log(x - \log x)}{x} \leq \frac{\log x}{x}.$$

Applicando il teorema dei carabinieri si ha quindi che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

e non ci sono asintoti obliqui.

Calcoliamo ora la derivata:

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \log x} = \frac{x - 1}{x(x - \log x)}.$$

Abbiamo già visto che $x - \log x > 0$, quindi risulta che

$$f'(x) < 0 \iff 0 < x < 1, \ f'(1) = 0, \ f'(x) > 0 \iff x > 1.$$

La funzione è quindi strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 1]$, strettamente crescente sulla semiretta $[1, \infty)$ e il punto $x = 1$ è di minimo assoluto. Il minimo della funzione vale quindi $f(1) = \log(1 - \log 1) = 0$.

Calcoliamo ora la derivata seconda per valutare la convessità.

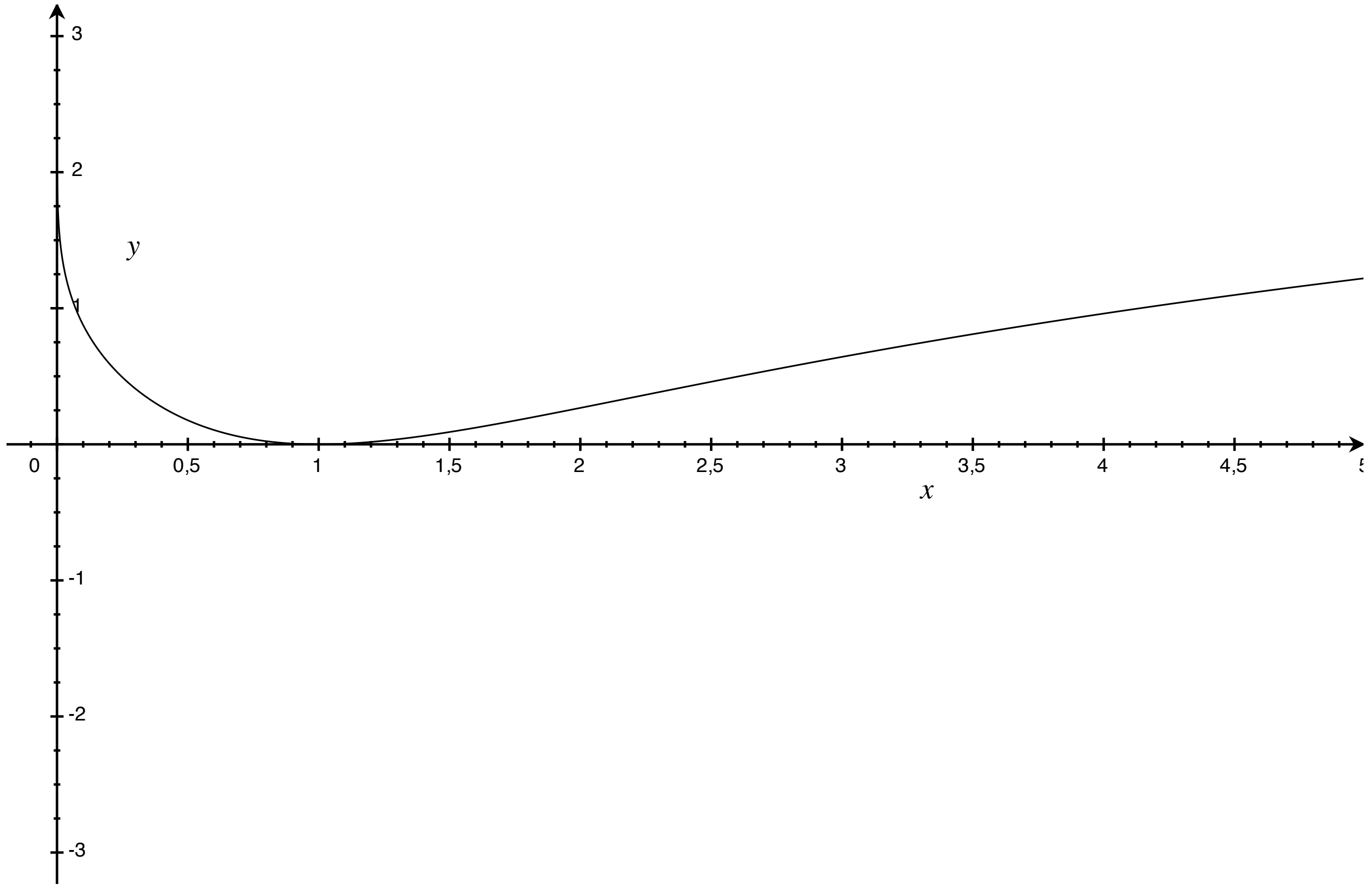
$$f''(x) = \frac{x(x - \log x) - (x - 1)\left((x - \log x) + x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)}{x^2(x - \log x)^2} = \frac{x - \log x - (x - 1)^2}{x^2(x - \log x)^2}.$$

Osserviamo che il denominatore è sempre positivo, quindi studieremo solo il segno del numeratore. Lo studio risulta piuttosto complicato, tuttavia possiamo osservare che

$$\lim_{x \to 0^+} x - \log x - (x - 1)^2 = 0 - (-\infty) - (0 - 1)^2 = \infty,$$

$$\lim_{x \to \infty} x - \log x - (x - 1)^2 = \lim_{x \to \infty} x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{\log x}{x^2} - \left(\frac{x - 1}{x}\right)^2\right) = \infty(0 - 0 - 1) = -\infty.$$

Dal teorema sulla permanenza del segno segue che $f''(x)$ è positiva in un intorno destro di 0 e negativa in un intorno di ∞, quindi f ha almeno un cambio di convessità.



3
2
y
1
-1
-2
-3
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
x

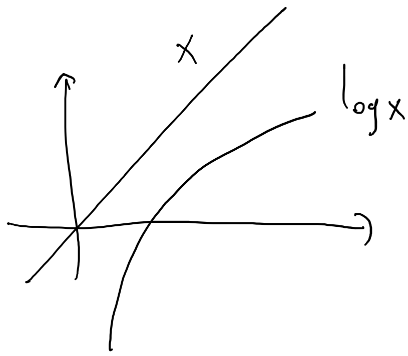
Studiare $f(x) = \log(x - \log x)$.

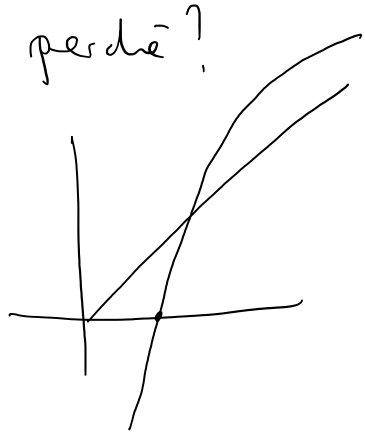
Insieme di definizione.

$\log x \Rightarrow x > 0$

$x - \log x > 0 \iff x > \log x$ sempre

perché?





?

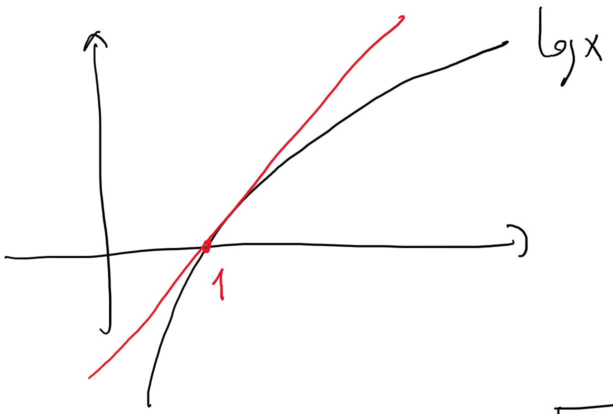
due modi per vederlo.

1) convessità (concavità).

$\log x$ è una funzione concava.

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d^2}{dx^2}\log x = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow \text{è concava.}$$

se è concava è sotto la retta tangente.



retta tangente in $x_0 = 1$ $\boxed{y = x - 1}$ tangente.

$$y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \qquad g(x) = \log x \qquad x_0 = 1.$$

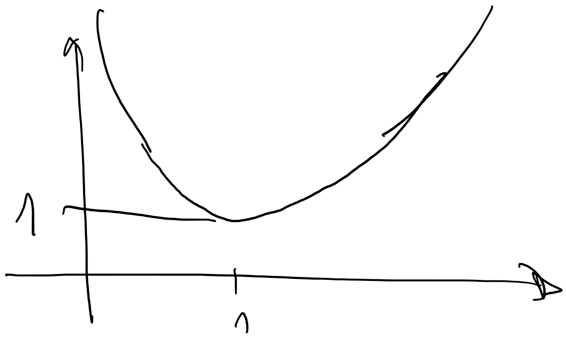
$$g'(x) = \frac{1}{x} \qquad g'(1) = 1 \quad \Rightarrow y = 0 + 1\cdot(x-1) = x - 1$$

$$\Rightarrow \log x \leq x - 1 < x \quad \Rightarrow \log x < x.$$

2) $\log x < x \Rightarrow x - \log x > 0$

diciamo $h(x) = x - \log x$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$



$\Rightarrow h$ ha minimo.

troviamolo

$$h' = 1 - \frac{1}{x}$$

$$h' > 0 \iff 1 - \frac{1}{x} > 0 \iff 1 > \frac{1}{x} \iff x > 1.$$

$\Rightarrow x = 1$ è punto di minimo assoluto

$$\Rightarrow \min(h) = h(1) = 1 - \log 1 = 1 \Rightarrow h(x) \geq 1 > 0 \quad \forall x.$$

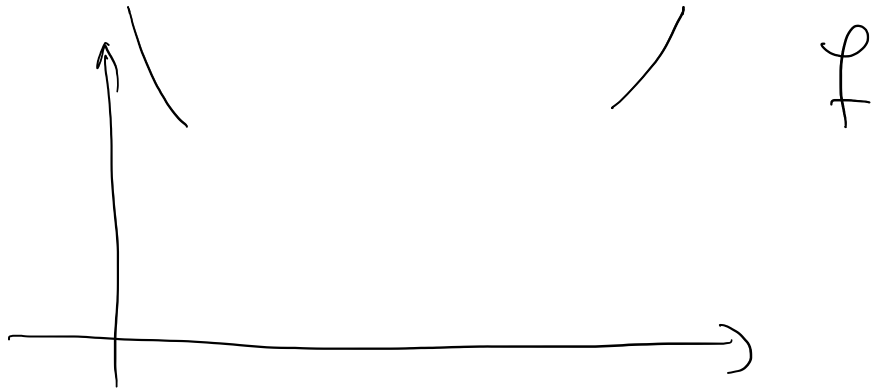
---

f è definita $\forall x > 0$.

Limiti

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \log(x - \log x) = \log(0 + \infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \log(x - \log x) = \log(+\infty) = +\infty$$



asintoto verticale $x=0$

asintoto obliquo?

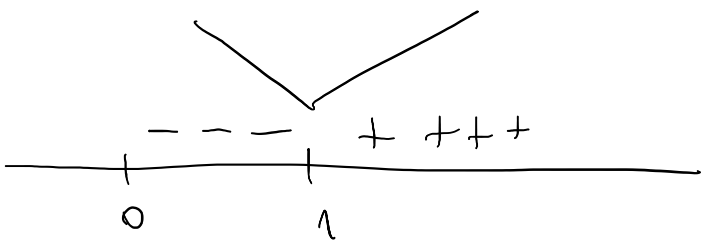
$$0 \le \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x-\log x)}{x} \le \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} \to 0$$

$\Rightarrow$ non c'è asintoto obliquo.

$$f'(x) = \frac{1}{x-\log x}\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x(x-\log x)}$$

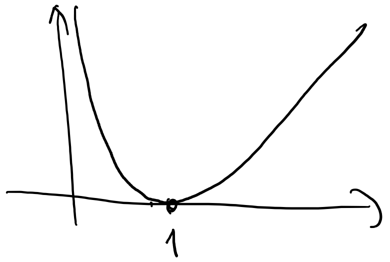
segno di f'. $x>0$ $x-\log x>0$ sempre.

$x-1>0 \iff x>1$



$x=1$ è punto di minimo assoluto

$\min(f) = f(1) = \log(1-\log 1) = \log 1 = 0.$



Convessità.

$$f'(x) = \frac{x-1}{x(x-\log x)}$$

$$f'' = \frac{x(x-\log x) - (x-1)\cdot\left(x-\log x + x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}{x^2(x-\log x)^2} =$$

$$= \frac{x(x-\log x) - (x-1)(2x-\log x \cancel{+x} -1)}{x^2(x-\log x)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - x\cancel{\log x} - (2x^2 - x\cancel{\log x} - x - 2x + \log x + 1)}{x^2(x-\log x)^2} =$$

$$= \frac{x^2-2x^2+3x-\log x-1}{x^2(x-\log x)^2} = \frac{-x^2+3x-1-\log x}{x^2(x-\log x)^2}.$$

dimostrare che f ha almeno 1 cambio di convessità.

segno di f''

$x^2(x-\log x)^2 > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} -x^2+3x-1-\log x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} -x^2+3x-1-\log x = -\infty$$

$\Rightarrow f''$ cambia segno almeno 1 volta.

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{x} + 2 & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

determinandone la continuità, la derivabilità, gli eventuali punti di massimo o minimo assoluti e relativi, estremi inferiore e superiore e gli eventuali asintoti.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in ogni punto $x \neq 0$ perché è somma, prodotto e composizione di funzioni derivabili. Inoltre

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} + 2 = \lim_{x\to 0} \frac{1+3x+o(x)-1}{x} + 2 = 5 = f(0)$$

quindi f è continua anche in 0. Se $x \neq 0$ risulta

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}x - (e^{3x}-1)}{x^2} = \frac{e^{3x}(3x-1)+1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+3x+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right)(3x-1)+1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{9x^2-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

Quindi f è derivabile anche in 0 e $f'(0) = \frac{9}{2}$. Studiamo ora il segno della derivata per $x \neq 0$. Basterà considerare il numeratore, essendo il denominatore sempre positivo. Poniamo

$$g(x) = e^{3x}(3x-1)+1$$

e osserviamo che $g'(x) = 3e^{3x}(3x-1) + 3e^{3x} = 9xe^{3x}$; quindi $g'(x) > 0$ se $x > 0$ e $g'(x) < 0$ se $x < 0$. Ne segue che g ha un punto di minimo assoluto stretto per $x = 0$. Dato che $g(0) = 0$, otteniamo che g è sempre positiva e di conseguenza anche $f'(x)$ è sempre positiva. Allora f è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$, pertanto non ha né punti di massimo né punti di minimo locali e assoluti.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{3x}-1}{x} + 2 = \frac{0-1}{-\infty} + 2 = 2$$

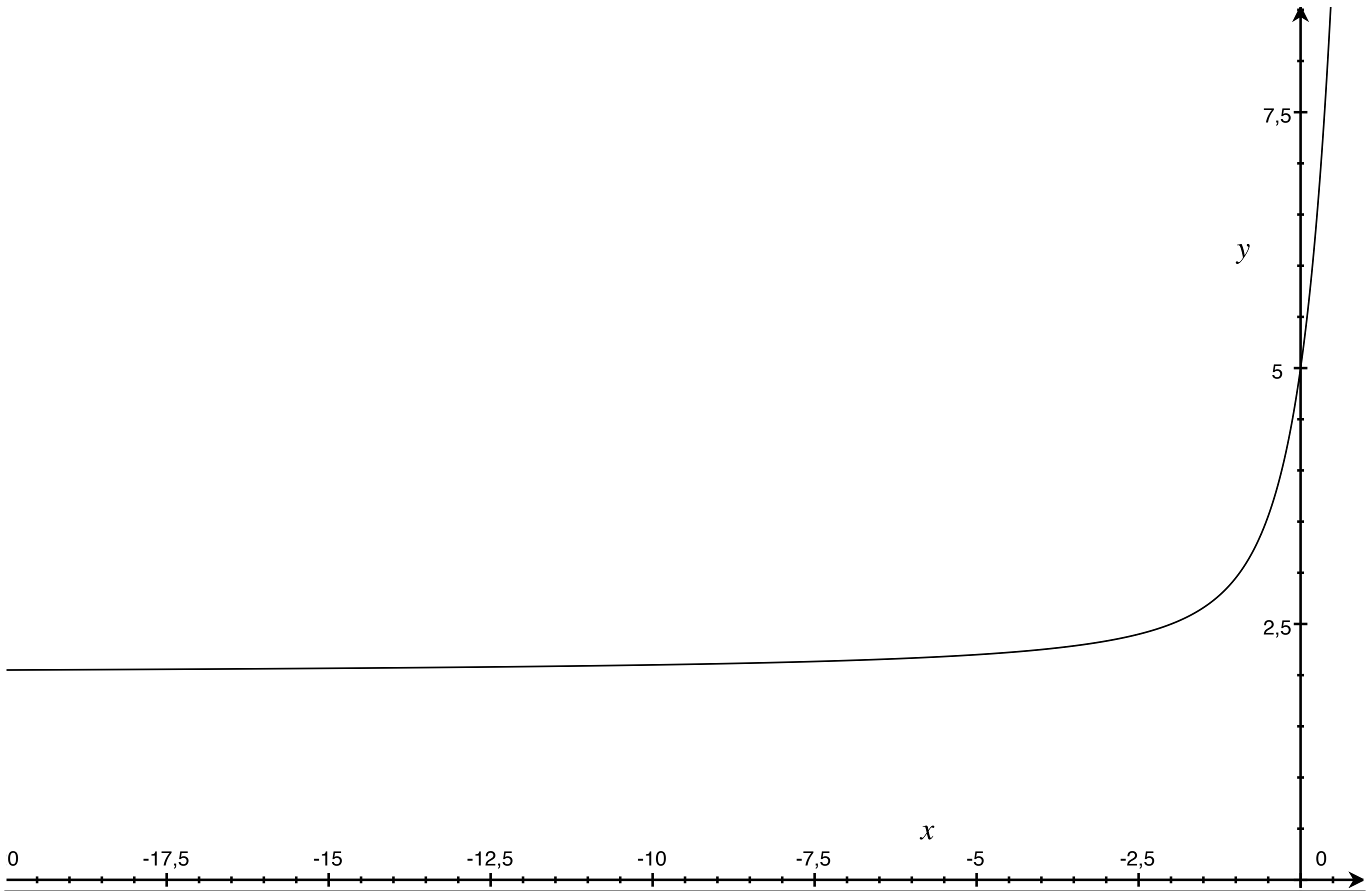
f ha quindi l'asintoto orizzontale $y = 2$ per $x \to -\infty$. Applicando il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}-1}{x} + 2 = \lim_{x\to +\infty} \frac{3e^{3x}}{1} + 2 = +\infty.$$

controlliamo quindi l'eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}-1}{x^2} + \frac{2}{x} = +\infty$$

dove l'ultimo limite si può ottenere applicando il teorema di de l'Hôpital 2 volte. Non ci sono quindi asintoti obliqui, come non ci sono asintoti verticali essendo f continua in tutto $\mathbb{R}$.



y
7,5
5
2,5
x
0
-17,5
-15
-12,5
-10
-7,5
-5
-2,5
0

Esercizio 1 Calcolare il limite della successione $a_n = \dfrac{\log(1+n)}{\log n}, \quad n \geq 2$ e determinarne l'estremo superiore.

Soluzione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n)}{\log n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n(1+1/n))}{\log n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n + \log(1+1/n)}{\log n} = 1.$$

Osserviamo che la successione $\{a_n\}_n$ è decrescente. Infatti $a_n = 1 + \dfrac{\log(1+1/n)}{\log n}$. La successione $\{\log(1+1/n)\}_n$ risulta decrescente, essendo il logaritmo una funzione crescente e la successione $(1+1/n)$ decrescente. Invece $\{\log n\}_n$ è crescente e tutte le successioni in questione sono positive, quindi $\{a_n\}_n$ è decrescente. L'estremo superiore risulta dunque $\dfrac{\log 3}{\log 2}$.

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x) = 2\,x + \sqrt{x^2-1}$$

determinarne insieme di definizione, asintoti, intervalli di monotonia, massimi e minimi (specificando quali sono relativi e quali assoluti), convessità e tracciarne un grafico qualitativo.

Soluzione

La funzione è definita in $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2\,x+\sqrt{x^2-1})\,(-2\,x+\sqrt{x^2-1})}{(-2\,x+\sqrt{x^2-1})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3\,x^2-1}{(-2\,x+\sqrt{x^2-1})} = -\infty.$$

Quindi non ci sono né punti di massimo né punti di minimo assoluti. Risulta inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 3\,x = \lim_{x\to+\infty} -x + \sqrt{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-x+\sqrt{x^2-1})\,(x+\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{(x+\sqrt{x^2-1})} = 0$$

Quindi $y = 3\,x$ è asintoto obliquo destro. Analogamente si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = 0,$$

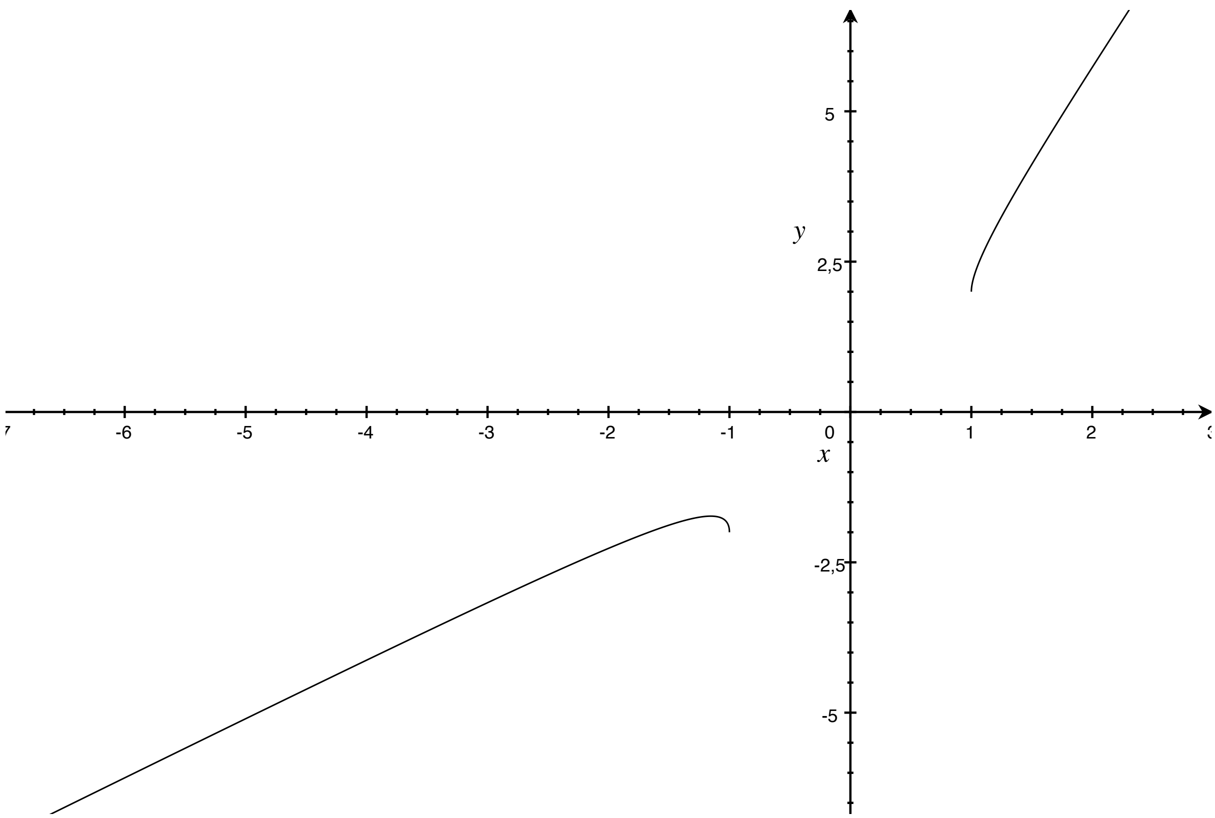
quindi $y = x$ è asintoto obliquo sinistro. Per determinare eventuali massimi o minimi locali calcoliamo

$$f'(x) = 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Quindi $f'(x) = 0$ per $x = -\sqrt{4/3}$ e $f'(x) > 0$ su $(-\infty, -\sqrt{4/3})$ e $(1, +\infty)$. La funzione risulta dunque crescente su $(-\infty, -\sqrt{4/3})$ e $(1, +\infty)$, mentre risulta decrescente su $(-\sqrt{4/3}, -1)$. La funzione ha un punto di massimo relativo in $x = -\sqrt{4/3}$. Inoltre ha due punti di minimo relativo in $x = 1$ e in $x = -1$, nei quali la funzione non è derivabile. In particolare $\lim_{x\to1} f'(x) = +\infty$ mentre $\lim_{x\to-1} f'(x) = -\infty$. Per la convessità calcoliamo la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2-1)} < 0.$$

Quindi f è concava sulle semirette $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$.



Esercizio: Studiare

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{x}+2 & \text{se } x\neq 0 \\ 5 & \text{se } x=0. \end{cases}$$

f è definita in tutto $\mathbb{R}$.

continuità? se $x\neq 0$ è continua.

in $x=0$?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}+2=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+3x+o(x)-\cancel{1}}{x}+2=3+2=5$$

f è continua in $x=0$.

f è derivabile? se $x\neq 0$ sì.

in $x=0$? rapporto incrementale

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{3x}-1}{x}+2-5}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+\cancel{3x}+\frac{1}{2}9x^2+o(x^2)-\cancel{1}-\cancel{3x}}{x^2}$$

$$=\frac{9}{2}. \qquad e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \qquad t=3x$$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $x_0=0$ e $f'(0)=\frac{9}{2}$.

f non ha asintoti verticali.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}-1}{x}+2=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{3x}-1}{x}+2=\frac{e^{-\infty}-1}{-\infty}+2=0+2=2.$$

asintoto orizzontale $y=2$ per $x\to-\infty$.

asintoto obliquo a $+\infty$?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}-1}{x^2}+\frac{2}{x}=+\infty.$$

nessun asintoto obliquo.

Max e min locali.

$$f'(x)=\frac{3e^{3x}\cdot x-(e^{3x}-1)\cdot 1}{x^2}=$$

$$=\frac{3xe^{3x}-e^{3x}+1}{x^2} \quad \text{segno di } f'?$$

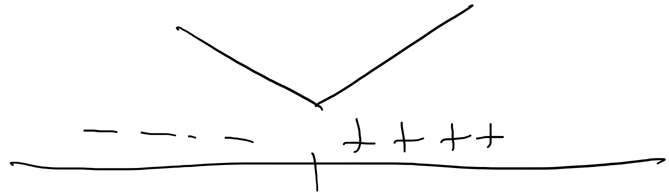
dipende dal segno di $3xe^{3x}-e^{3x}+1$

$$e^{3x}(3x-1)+1>0?$$

pongo $g(x)=e^{3x}(3x-1)+1$ e la studio.

$$g'(x)=3e^{3x}(3x-1)+e^{3x}\cdot 3=$$

$$=e^{3x}(9x-3+3)=e^{3x}9x$$



segno di g'

$\Rightarrow$ g ha un minimo in $x=0$

$$g(x) \geq g(0) \quad \forall x$$

$$g(0) = e^{3 \cdot 0}(3 \cdot 0 - 1) + 1 = 1(-1) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x.$$

Ma $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x.$

$\Rightarrow f$ è crescente $\Rightarrow f$ non ha max o min locali

$$\Rightarrow \inf(f) = 2, \quad \sup(f) = +\infty.$$

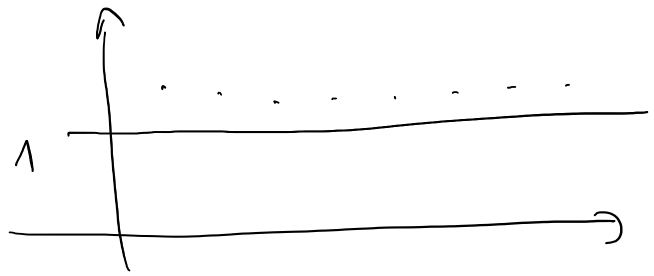
Es: $\quad a_n = \dfrac{\log(1+n)}{\log n} \qquad n \geq 2.$

$\sup(a_n) = ?$

$$\frac{\log(1+n)}{\log n} = \frac{\log\left(n\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)}{\log n} = \frac{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} =$$

$$= 1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} \longrightarrow 1$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$



$a_n = 1 + \dfrac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n}$

$\frac{1}{n}$ è decrescente $\Rightarrow 1+\frac{1}{n}$ è decrescente

log è crescente $\Rightarrow \log(1+\frac{1}{n})$ è decrescente

$\left.\begin{array}{l}\text{numeratore decrescente}\\ \text{denominatore crescente}\end{array}\right\}$ entrambi positivi

$\Rightarrow \dfrac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n}$ è decrescente.

$\Rightarrow a_n$ è decrescente $\Rightarrow \max(a_n) = \sup(a_n)$

$= a_2 = \dfrac{\log 3}{\log 2}$.

alternativa $\quad a_n = \dfrac{\log(1+n)}{\log n}$

$f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{\log x}$

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}\cdot \log x - \frac{\log(1+x)}{x}}{\log^2 x}$

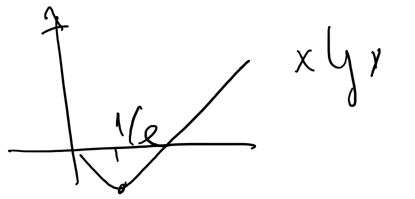
$$= \frac{x\log x - (1+x)\log(1+x)}{(1+x)\, x \log^2 x} \qquad x \geq 2.$$

se $f' \leq 0 \Rightarrow f$ è decrescente $\Rightarrow a_n$ è decrescente.

$$x \log x - (1+x)\log(1+x) \leq 0 \quad ?$$

$$x \log x \leq (1+x)\log(1+x)$$ sempre vera

perché $h(x) = x\log x$ è crescente per $x \geq 1/e$



$h' = x \cdot \frac{1}{x} + \lg x = 1 + \lg x$

$h' = 0 \quad \log x = -1 \quad x = \frac{1}{e}$

Studiare $\quad f(x) = 2x + \sqrt{x^2-1}$

insieme di definizione

$x^2 - 1 \geq 0 \qquad x^2 \geq 1 \qquad x \geq 1 \vee x \leq -1$

$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x + \sqrt{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2-1} = -\infty + \infty =$$

$$= 2x + \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 2x + \sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 2x + |x| \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 2x - \overset{\downarrow}{x} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} =$$

$x \to -\infty \Rightarrow x < 0$

$$= x\left(2 - \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) \to -\infty(2-1) = -\infty .$$

$$\Rightarrow \quad \sup(f) = +\infty \qquad \inf(f) = -\infty .$$

non ci sono asintoti verticali.

asintoti obliqui?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2-1}}{x} =$$

$$= 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2 + \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = 2+1 = 3$$

$$\Rightarrow \quad m = 3 .$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} 2x + \sqrt{x^2-1} - 3x =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-1} - x = \lim_{x\to\infty} x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - x =$$

$t = -\frac{1}{x^2}$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} - x = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \cancel{x} - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \cancel{x} = 0$$

$\Rightarrow \quad y = 3x + 0 = 3x$ asintoto obliquo a $+\infty$.

a $-\infty$?

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-1}}{\cancel{x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}2+\frac{\sqrt{x^2-1}}{-|x|}=2+\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{-\sqrt{x^2}}=$$

$$=2-\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\to 2-1=1.$$

$\Rightarrow\ m=1$.

$$f(x)-mx=2x+\sqrt{x^2-1}-x=x+\sqrt{x^2-1}=$$

$$=x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=x+|x|\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}=$$

$$=x-\overset{x<0}{\overset{\downarrow}{x}}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\cancel{x-x}+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$$

$q=0$ $\quad y=x$ asintoto obliquo $x\to-\infty$.

max e min locali.

$$f'=2+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=2+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

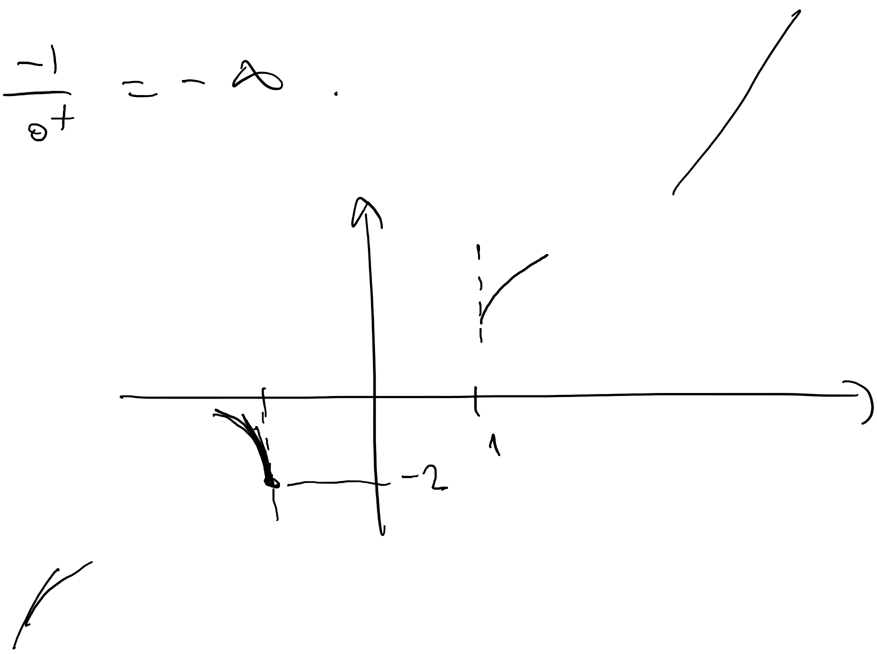
in $x=\pm1$ f non è derivabile.

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{0}} = 2 + \frac{1}{0^+}$$

$$= +\infty . \quad \Rightarrow \quad f'_+(1) = +\infty .$$

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2 + \frac{-1}{\sqrt{0}} =$$

$$= 2 + \frac{-1}{0^+} = -\infty .$$



$x = 1$, $x = -1$ punti di cuspide (semi-cuspide).

$$f(-1) = -2 + \sqrt{0} = -2$$

segno di f'.

$$f' = 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$2 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0 \; ? \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > -2$$

$x \geq -2\sqrt{x^2-1}$ devo fare i quadrati.

Se $x \geq 0$ è sempre vera

$x \geq 0$ $\quad -2\sqrt{x^2-1} < 0$

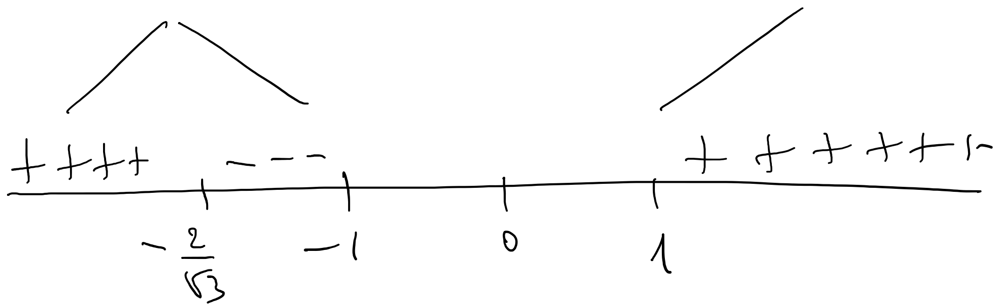
Se $x < 0 \Rightarrow$ sono entrambe negative

$\Rightarrow$ inverto la disuguaglianza facendo i quadrati

$$x^2 < 4(x^2-1) \qquad x^2 < 4x^2 - 4$$

$$4 < 3x^2 \qquad x^2 > \frac{4}{3} \qquad |x| > \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ma sto considerando $x < 0 \Rightarrow x < -\frac{2}{\sqrt{3}}$



$x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ è punto di max locale