Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x \log x}{(1 - \log x)^2}$$

determinandone insieme di definizione, massimo e minimo oppure estremi superiore e inferiore, asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo o minimo locali. Tracciare inoltre un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per $x > 0$ data la presenza del logaritmo, inoltre dobbiamo escludere i valori per cui si annulla il denominatore, quindi $\log x = 1$ cioè $x = e$. L'insieme di definizione di f sarà pertanto $(0, e) \cup (e, +\infty)$. Vediamo ora i limiti. Ricordando che, dal teorema di de l'Hôpital, $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$, avremo:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{0}{(1 - (-\infty))^2} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to e} f(x) = \frac{e\, 1}{(1-1)^2} = \frac{e}{0^+} = +\infty.$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\log x$ si ottiene che

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\log x - 2} = +\infty.$$

La funzione ha quindi un asintoto verticale di equazione $x = e$ e non ha asintoti orizzontali. Potrebbe avere un asintoto obliquo. Per verificarne la presenza calcoliamo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{(1 - \log x)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\log x - 2} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Non c'è quindi nessun asintoto obliquo. Calcoliamo ora la derivata

$$f'(x) = \frac{(\log x + x\frac{1}{x})(1 - \log x)^2 + x(\log x)2(1 - \log x)\frac{1}{x}}{(1 - \log x)^4} = \frac{(\log x + 1)(1 - \log x)^2 + 2\log x(1 - \log x)}{(1 - \log x)^4}$$

$$= \frac{(1 - \log x)\left((\log x + 1)(1 - \log x) + 2 \log x\right)}{(1 - \log x)^4} = \frac{1 - \log^2 x + 2 \log x}{(1 - \log x)^3}.$$

Studiamo il segno della derivata.

$$(1 - \log x)^3 > 0 \iff \log x < 1 \iff x < e$$

ponendo $t = \log x$ otteniamo che

$$1 - \log^2 x + 2 \log x \geq 0 \iff 1 - t^2 + 2t \geq 0 \iff 1 - \sqrt{2} \leq t \leq 1 + \sqrt{2} \iff e^{1-\sqrt{2}} \leq x \leq e^{1+\sqrt{2}}.$$

Combinando insieme il segno di numeratore e di denominatore otteniamo che

$$f'(x) > 0 \iff e^{1-\sqrt{2}} < x < e \text{ oppure } x > e^{1+\sqrt{2}}$$

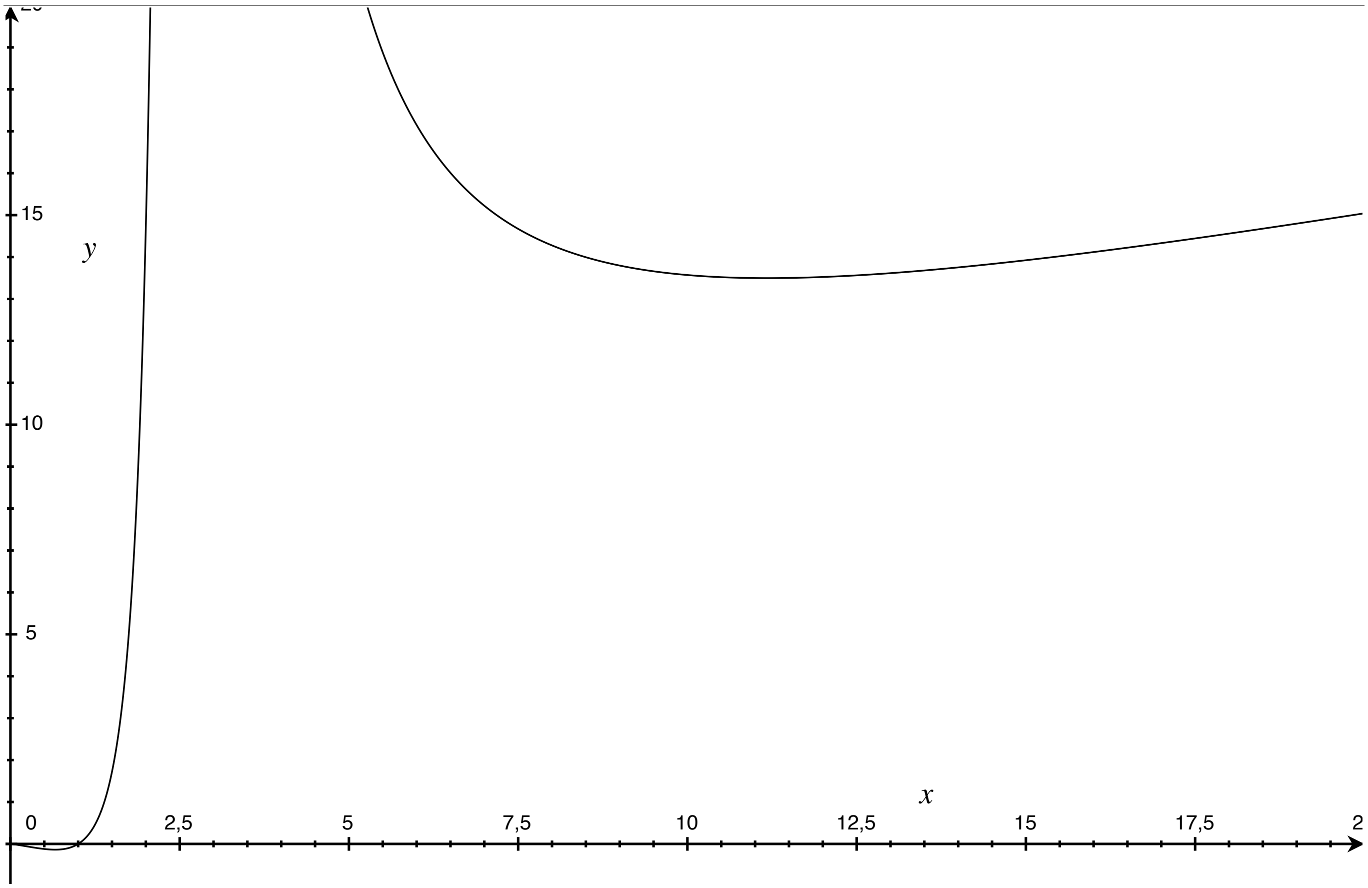
$$f'(x) < 0 \iff 0 < x < e^{1-\sqrt{2}} \text{ oppure } e < x < e^{1+\sqrt{2}}$$

$$f'(e^{1-\sqrt{2}} = f'(e^{1+\sqrt{2}} = 0.$$

La funzione è quindi strettamente decrescente nell'intervallo $\left(0, e^{1-\sqrt{2}}\right]$, strettamente crescente in $\left[e^{1-\sqrt{2}}, e\right)$, strettamente decrescente in $\left(e, e^{1+\sqrt{2}}\right]$ e strettamente crescente sulla semiretta $\left[e^{1+\sqrt{2}}, +\infty\right)$. I punti $x_1 = e^{1-\sqrt{2}}$ e $x_2 = e^{1+\sqrt{2}}$ sono di minimo locale. La funzione assume il suo valore minimo nel punto di ascissa x_1 e tale minimo vale

$$\min(f) = f(x_1) = \frac{e^{1-\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})}{2}.$$

La funzione non è superiormente limitata quindi $\sup(f) = +\infty$.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\arctan(e^x)}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$

Soluzione

Effettuando la sostituzione $x = \log t$ avremo $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$ e gli estremi di integrazione diventano $t = 1$ quando $x = 0$ e $t = e$ quando $x = 1$. Avremo quindi

$$\int_0^1 \frac{\arctan(e^x)}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int_1^e \frac{\arctan t}{t + \frac{1}{t}} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^e \frac{\arctan t}{t^2+1}\, dt.$$

Effettuiamo l'ulteriore sostituzione $z = \arctan t$, $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$ con il cambiamento di estremi

$$t = 1 \iff z = \frac{\pi}{4}, \qquad t = e \iff z = \arctan e.$$

Avremo quindi

$$\int_1^e \frac{\arctan t}{t^2+1}\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan e} z\, dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan e} = \frac{(\arctan e)^2}{2} - \frac{\pi^2}{32}.$$

Esercizio 3 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{\sqrt{x}} = 1 \\ y(1) = \dfrac{e^2+2}{2e^2}. \end{cases}$$

Determinare il minimo di $y(x)$ per $x \in (0, +\infty)$.

Soluzione

L'equazione è lineare a coefficienti continui definiti per $x > 0$. Scriviamola nel modo canonico $y' = a(x)y + b(x)$ ponendo $a(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\quad b(x) = 1$. Cerchiamo una primitiva di $a(x)$:

$$A(x) = \int -\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = -2\sqrt{x}.$$

Calcoliamo ora, con la sostituzione $x = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$

$$\int e^{-A(x)b(x)}\, dx = \int e^{2\sqrt{x}}\, dx = \int e^{2t} 2t\, dt = e^{2t}t - \int e^{2t}\, dt = e^{2t}t - \frac{e^{2t}}{2} = \sqrt{x}\, e^{2\sqrt{x}} - \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2}.$$

Quindi

$$y(x) = e^{-2\sqrt{x}} \left(\sqrt{x}\, e^{2\sqrt{x}} - \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2} + c \right) = \sqrt{x} - \frac{1}{2} + ce^{-2\sqrt{x}}.$$

Determiniamo ora c imponendo la condizione iniziale.

$$y(1) = 1 - \frac{1}{2} + ce^{-2}$$

quindi dovrà essere

$$1 - \frac{1}{2} + ce^{-2} = \frac{e^2 + 2}{2e^2} \iff \frac{e^2 + 2}{2e^2} - \frac{1}{2} = \frac{c}{e^2} \iff c = 1.$$

Ne segue che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2} + e^{-2\sqrt{x}}.$$

Cerchiamo il minimo di $y(x)$ calcolando la derivata

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

quindi $y'(x) \geq 0$ se e solo se

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \iff \frac{1}{2} > e^{-2\sqrt{x}} \iff \log\frac{1}{2} > -2\sqrt{x} \iff \frac{\log 2}{2}, \sqrt{x} \iff \frac{(\log 2)^2}{4} < x.$$

Abbiamo ottenuto che la funzione $y(x)$ è strettamente decrescente in $\left(0, \frac{(\log 2)^2}{4}\right]$ e strettamente crescente in $\left[\frac{(\log 2)^2}{4}, +\infty\right)$. Il punto $x = \frac{(\log 2)^2}{4}$ è quindi di minimo assoluto. Il minimo di $y(x)$ è quindi

$$y\left(\frac{(\log 2)^2}{4}\right) = \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2} + e^{-2\frac{\log 2}{2}} = \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\log 2}{2}.$$

Esercizio: $f(x) = \dfrac{x \log x}{(1-\log x)^2}$

studiare la funzione. (no convessità).

Insieme di definizione.

$\log x \to x > 0$.

$(1-\log x)^2 \neq 0 \qquad 1-\log x \neq 0 \qquad 1 \neq \log x \qquad x \neq e$

f è definita in $(0,e) \cup (e,+\infty)$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \log x}{(1-\log x)^2} = \frac{0}{\infty} = 0$$

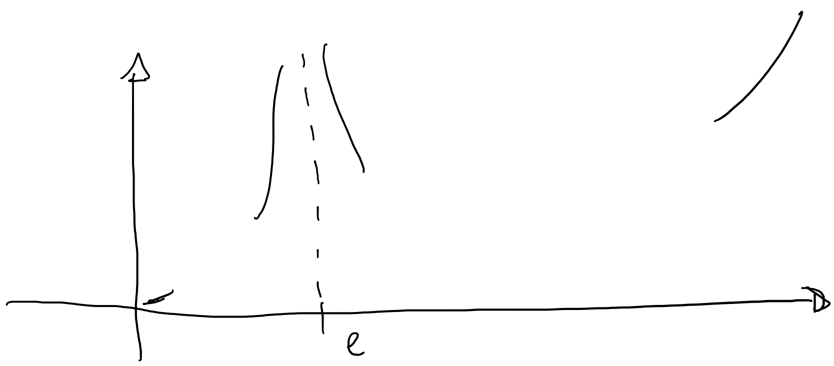
$x^\alpha \log x^\beta \to 0$ per $x \to 0$ $\forall \alpha, \beta > 0$.

$$\lim_{x \to e} \frac{x \log x}{(1-\log x)^2} = \frac{e \log e}{(0)^2} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \log x}{(1-\log x)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x \log x}{\log^2 x - 2\log x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\log x - 2 + \frac{1}{\log x}} = +\infty$$

$\frac{1}{\log x} \to 0$



$\sup(f) = +\infty$ $\quad$ f è limitata inferiormente.

$$f(x) = \frac{x \log x}{(1-\log x)^2}$$

asintoto obliquo?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\log x}{(1-\log x)^2\cancel{x}} = 0$$

non c'è asintoto obliquo.

$$f'(x) = \frac{(1\cdot\log x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}})(1-\log x)^2 - \cancel{x}\log x\, 2(1-\log x)\cdot(-\frac{1}{\cancel{x}})}{(1-\log x)^4}$$

$$= \frac{(\log x+1)(1-\log x)^2 + 2\log x(1-\log x)}{(1-\log x)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{(1-\log x)}\left[(\log x+1)(1-\log x)+2\log x\right]}{(1-\log x)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{1-\log^2 x + 2\log x}{(1-\log x)^3}$$

segno di f'.

$1-\log^2 x + 2\log x > 0$? $\qquad \log x = t$

$1-t^2+2t>0 \qquad -t^2+2t+1=0$

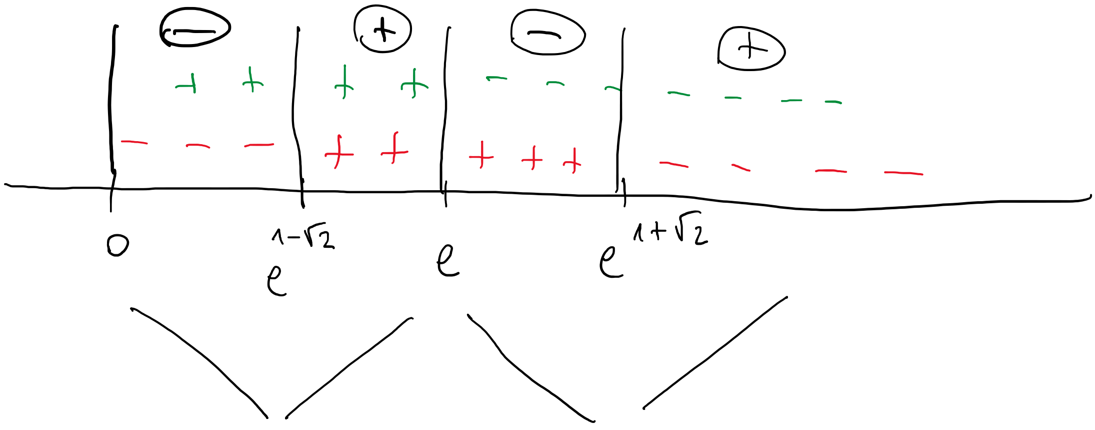
$$t = \frac{-1\pm\sqrt{1+1}}{-1} = \frac{-1\pm\sqrt{2}}{-1} = 1\pm\sqrt{2}$$

$\to +1-\sqrt{2} < t < +1+\sqrt{2}$

$+1-\sqrt{2} < \log x < +1+\sqrt{2} \iff e^{+1-\sqrt{2}} < x < e^{+1+\sqrt{2}}$

denominatore $\quad (1-\log x)^3 > 0 \iff 1-\log x > 0$

$1 > \log x \qquad e > x$



$x = e$ asintoto verticale.

$x = e^{1-\sqrt{2}}$ è punto di minimo locale

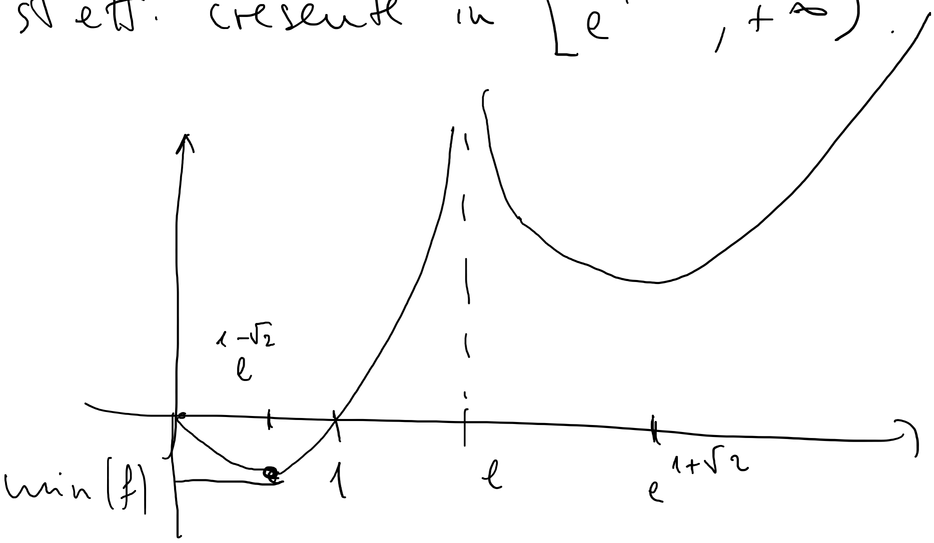
$x = e^{1+\sqrt{2}}$ è punto di minimo locale

f è strettamente decrescente in $(0, e^{1-\sqrt{2}}]$

è strettamente crescente in $[e^{1-\sqrt{2}}, e)$

strettam. decrescente in $(e, e^{1+\sqrt{2}}]$

strett. crescente in $[e^{1+\sqrt{2}}, +\infty)$.



$$f(x) = \frac{x \log x}{(1-\log x)^2} \Rightarrow f(x) > 0 \iff x > 1.$$

$$\min(f) = f\left(e^{1-\sqrt{2}}\right) = \frac{e^{1-\sqrt{2}} \log\left(e^{1-\sqrt{2}}\right)}{\left[1 - \log\left(e^{1-\sqrt{2}}\right)\right]^2} =$$

$$= \frac{e^{1-\sqrt{2}} \cdot (1-\sqrt{2})}{\left[1-(1-\sqrt{2})\right]^2} = \frac{e^{1-\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})}{2} < 0.$$

Es 3:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{e^x + e^{-x}}\, dx$$

$$\int \frac{\operatorname{artg}(e^x)}{e^x + e^{-x}}\, dx$$

$e^x = t \Rightarrow x = \log t$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \qquad dx = \frac{dt}{t}$

$e^{-x} = \frac{1}{t}$

$$= \int \frac{\operatorname{arctg} t}{t + \frac{1}{t}} \frac{dt}{t} =$$

per parti

$$= \int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2+1}\, dt = \operatorname{arctg} t \cdot \operatorname{arctg} t - \int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2+1}\, dt$$

$$\Rightarrow 2 \int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2+1}\, dt = (\operatorname{arctg} t)^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2+1}\, dt = \frac{(\operatorname{arctg} t)^2}{2}$$

oppure $\int f \cdot f'\, dx = \frac{f^2}{2} + c$

$$\int \operatorname{arctg} t \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{(\operatorname{artg} t)^2}{2} + c$$

oppure $\quad z = \operatorname{artg} t \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \quad dz = \frac{dt}{1+t^2}$

$$\Rightarrow \int \frac{\operatorname{artg} t}{t^2+1}\, dt = \int z\, dz = \frac{z^2}{2} = \frac{(\operatorname{artg} t)^2}{2}.$$

$t = e^x$

$$\int \frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{e^x + e^{-x}}\, dx = \frac{[\operatorname{artg}(e^x)]^2}{2} + c$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{e^x + e^{-x}}\, dx = \left[\frac{(\operatorname{arctg}(e^x))^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left((\operatorname{arctg} e^1)^2 - (\operatorname{artg} e^0)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{artg}^2 e - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right) = \frac{\operatorname{artg}^2 e}{2} - \frac{\pi^2}{32}.$$

<u>Es 3</u>: $\begin{cases} y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = 1 \\ y(1) = \frac{e^2+2}{2e^2} \end{cases}$ trovare il minimo di $y(x)$ per $x \in (0,+\infty)$

equazione lineare

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{x}} + 1 \qquad y' = a(x)\, y + b(x)$$

$$a(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad b(x) = 1$$

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int -\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = -2\sqrt{x}$$

$$\int e^{-A(x)}\, b(x)\,dx = \int e^{2\sqrt{x}} \cdot 1\,dx$$

$$\left[\; 2\sqrt{x} = t \qquad 4x = t^2 \qquad x = \frac{t^2}{4} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{4} = \frac{t}{2} \qquad dx = \frac{t}{2}\,dt \;\right]$$

$$= \int e^t \frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(e^t t - \int e^t \cdot 1\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t \cdot e^t - e^t\right) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}\, e^{2\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}}\right)$$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(\int b(x)\, e^{-A(x)}\,dx + c\right) =$$

$$= e^{-2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}\, e^{2\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}}\right) + c\right) =$$

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{2} + c\, e^{-2\sqrt{x}}$$

trovo c dalla condizione $y(1) = \dfrac{e^2+2}{2e^2}$

$$y(1) = \sqrt{1} - \frac{1}{2} + c\,e^{-2} = \frac{1}{2} + c\,e^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + c\,e^{-2} = \frac{e^2+2}{2e^2}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} + c\,e^{-2} = \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{e^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{e^2} = \frac{1}{e^2} \quad \Rightarrow \quad c = 1.$$

$$y(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2} + e^{-2\sqrt{x}}$$

trovare minimo di y.

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}\left(-2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} =$$

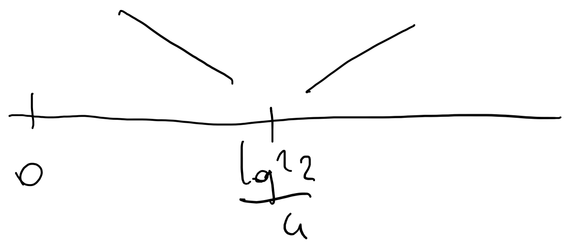
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - 2e^{-2\sqrt{x}}\right)$$

$$y'(x) > 0 \iff 1 - 2e^{-2\sqrt{x}} > 0$$

$$1 > 2e^{-2\sqrt{x}} \qquad \frac{1}{2} > e^{-2\sqrt{x}} \qquad \log\left(\frac{1}{2}\right) > -2\sqrt{x}$$

$$-\log 2 > -2\sqrt{x} \qquad \log 2 < 2\sqrt{x} \qquad \frac{\log 2}{2} < \sqrt{x}$$

$$\frac{\log^2 2}{4} < x$$



$x = \frac{\log^2 2}{4}$ è punto di minimo assoluto per y.

$$\min y = y\left(\frac{\log^2 2}{4}\right) = \sqrt{\frac{\log^2 2}{4}} - \frac{1}{2} + e^{-2\sqrt{\frac{\log^2 2}{4}}} =$$

$$= \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2} + e^{-2\frac{\log 2}{2}} = \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2} + e^{-\log 2} =$$

$$= \frac{\log 2}{2} \cancel{- \frac{1}{2}} + \cancel{2^{-1}} = \frac{\log 2}{2}.$$

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	Esercitazione 10 dicembre 2019

1. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}+\log(n+1)-\log n\right)^n =$

(a) 0 ▶ (b) e^2 (c) $+\infty$ (d) 1

2. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y\tan x + x \\ y(0) = -1. \end{cases}$ Allora $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} y(x) =$

▶ (a) $-\infty$ (b) $+\infty$ (c) 0 (d) -2

3. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+n)-n}{n^2} =$

(a) $-\frac{1}{2}$ ▶ (b) 0 (c) $-\infty$ (d) $+\infty$

4. $\lim_{x\to-\infty}\int_x^{\frac{1}{x}} e^{t+1}\,dt =$

(a) 0 (b) 1 ▶ (c) e (d) $-\infty$

5. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ y(\pi) = -e^{2\pi} \\ y'(\pi) = -5e^{2\pi}. \end{cases}$ Allora $y(2\pi) =$

(a) $-5e^{12\pi}+2e^{2\pi}$ ▶ (b) $e^{4\pi}$ (c) $7e^{2\pi}$ (d) $e^{2\pi}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\int_0^x 1-\cos(t^2)\,dt =$

▶ (a) $\frac{1}{10}$ (b) 0 (c) $+\infty$ (d) $\frac{2}{5}$

7. La successione $a_n = \log(n^2+1) - n$

▶ (a) non è limitata inferiormente (b) è strettamente decrescente e limitata inferiormente

(c) è strettamente crescente e limitata superiormente (d) non è limitata superiormente

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx =$

(a) -1 ▶ (b) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$ (c) $e^{\frac{\pi}{2}}$ (d) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

9. La successione $a_n = \frac{3^n - 3^{n\log n}}{n^n}$, definita per $n \geq 1$,

▶ (a) tende a $-\infty$ (b) non ha limite (c) tende a 0 (d) tende a $+\infty$

10. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y + 5x \\ y(0) = -9. \end{cases}$ Allora $y(3) =$

▶ (a) $-20-4e^3$ (b) -24 (c) 6 (d) $-10-14e^3$

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}+\log(n+1)-\log n\right)^n = (1+\infty-\infty)^\infty$$

$$\left(\frac{n+1}{n}+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n =$$

$$= e^{n\log\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n\left(\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\to 2} \to e^2.$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n)-n}{n^2} = 0$$

$$\frac{\log(1+n)-n}{n^2} = \underbrace{\frac{\log(1+n)}{n^2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{\to 0}$$

4) $$\lim_{x\to-\infty}\int_x^{1/x} e^{t+1}\,dt$$

$$\int e^{t+1}\,dt = e^{t+1}+c$$

$$\int_x^{1/x} e^{t+1}\,dt = \left[e^{t+1}\right]_x^{1/x} = e^{\frac{1}{x}+1} - e^{x+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}+1} - e^{x+1} = e^{\frac{1}{-\infty}+1} - e^{-\infty+1} =$$

$$= e^{0+1} - e^{-\infty} = e - 0 = e .$$

6) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5} \int_0^x 1-\cos(t^2)\, dt .$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x 1-\cos(t^2)\, dt}{x^5} = \frac{0}{0}$$

de l'Hôpital $\quad \frac{d}{dx} \int_0^x 1-\cos(t^2)\, dt = 1-\cos(x^2)$

teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{5x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-\frac{1}{2}x^4+o(x^6)\right)}{5x^4}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cancel{x^4}+o(x^{\cancel{6}\,2})}{5\cancel{x^4}} \longrightarrow \frac{1}{10}$$

7) $a_n = \log(n^2+1) - n \qquad$ limitata, sup, inf?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

$$\log(n^2+1) - n = \overset{\to\infty}{-n}\Big(\underbrace{\frac{\log(n^2+1)}{-n}}_{\to 0}+1\Big) = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

$$\log(n^2+1) \sim \log(n^2) = 2\log n$$

$$\log(n^2+1) = \log\left(n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \log(n^2) + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow a_n$ non è limitata inferiormente.

8) $$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$$

integro   derivo

$$\boxed{\int e^x \cos x \, dx} = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x)\, dx =$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

integro   derivo

$$- \boxed{\int e^x \cos x \, dx}$$

$$\Rightarrow \quad 2\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + c$$

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx = \left[\frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{\pi/2}\cos(\pi/2)} + e^{\pi/2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{e^0\cos 0 + \cancel{e^0 \sin 0}}{2}$$

$$= \frac{e^{\pi/2}}{2} - \frac{1}{2}.$$

9) $$a_n = \frac{3^n - 3^{n\log n}}{n^n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = ?$$

$$\frac{3^n}{n^n} - \frac{3^{n\log n}}{n^n}$$

$\downarrow$

0

$$3^{n\log n} = e^{\log\left(3^{n\log n}\right)} =$$

$$= e^{n\log n \log 3} = \left(e^{\log n}\right)^{n\log 3} = n^{n\log 3}$$

$$\frac{3^{n\log n}}{n^n} = \frac{n^{n\log 3}}{n^n} = n^{n\log 3 - n}$$

$$= n^{n(\log 3 - 1)} \to n^{\infty} \to \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

alternativa per calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n\log n}}{n^n}$

criterio della radice

$$\sqrt[n]{\frac{3^{n\log n}}{n^n}}$$

$$= \left(\frac{3^{n\log n}}{n^n}\right)^{1/n} = \frac{3^{(n\log n)\cdot\frac{1}{n}}}{n^{n\cdot\frac{1}{n}}} = \frac{3^{\log n}}{n}$$

$$= \frac{e^{\log n \log 3}}{n} = \frac{\left(e^{\log n}\right)^{\log 3}}{n} = \frac{n^{\log 3}}{n} \to +\infty .$$