Principio di sovrapposizione

$$y'' + ay' + by = f_1 + f_2$$

se $\bar{y}_1$ soluzione particolare di

$$y'' + ay' + by = f_1$$

e $\bar{y}_2$ soluzione particolare di

$$y'' + ay' + by = f_2$$

allora $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ è soluzione particolare di $y'' + ay' + by = f_1 + f_2$.

Es: $y'' + y' - 2y = \underbrace{x}_{f_1} - \underbrace{3\sin x + \cos x}_{f_2}$

omogenea $\quad y'' + y' - 2y = 0$

polinomio caratteristico $\quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad y_0 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$ soluz. omogenea.

cerco una soluzione particolare $\bar{y}_1$ di

$$y'' + y' - 2y = x$$

$f_1 = x \qquad f_1 = e^{\alpha x}\left(p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)\right)$

$\alpha = 0 \quad , \beta = 0 \quad , p(x) = x \quad , q(x) = 0$

$\alpha + i\beta = 0$ non è radice del polinomio caratt.

$\Rightarrow \quad m = 0$.

grado $p = 1$ grado $q = 0$.

$\Rightarrow \quad r(x) = Ax + B \qquad \beta = 0$

$$\bar{y}_1 = \cancel{e^{\alpha x}}^{\alpha = 0}\left(r(x)\underbrace{\cos(\beta x)}_{1} + \cancel{s(x)\sin(\beta x)}\right) \quad \beta = 0$$

$\bar{y}_1 = Ax + B$

$\bar{y}_1' = A \qquad \bar{y}_1'' = 0$

sostituisco in $\bar{y}_1'' + \bar{y}_1 - 2\bar{y}_1 = x$

$0 + A - 2(Ax + B) = x$

$-2Ax + A - 2B = x$

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ A - 2B = 0 \end{cases} \qquad A = -\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2} - 2B = 0 \qquad -\frac{1}{2} = 2B \qquad B = -\frac{1}{4}$$

$\bar{y}_1 = Ax + B = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

ora cerco $\bar{y}_2$ soluzione di

$\bar{y}_2'' + \bar{y}_2' - 2\bar{y}_2 = -3\sin x + \cos x$

$f_2 = -3\sin x + \cos x$

$f_2 = e^{\alpha x}\left(p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)\right)$

$\alpha = 0 \quad , \beta = 1 \quad , p(x) = 1 \quad q(x) = -3$

$\alpha + i\beta = i$ non è radice del polinomio caratt.

$\Rightarrow m = 0 \qquad$ grado$(p) = 0$, grado$(q) = 0$

$$\Rightarrow \bar{y}_2 = \cancel{e^{\alpha x}}\left(r(x)\cos(\beta x) + s(x)\sin(\beta x)\right) =$$

$$= A\cos x + B\sin x$$

$$\bar{y}_2' = -A\sin x + B\cos x$$

$$\bar{y}_2'' = -A\cos x - B\sin x$$

sostituisco in $\bar{y}_2'' + \bar{y}_2' - 2\bar{y}_2 = -3\sin x + \cos x$

$$\underbrace{(-A\cos x - B\sin x)}_{\bar{y}_2''} + \underbrace{(-A\sin x + B\cos x)}_{\bar{y}_2'} - 2\underbrace{(A\cos x + B\sin x)}_{\bar{y}_2} =$$

$$= -3\sin x + \cos x$$

$$\cos x(-A + B - 2A) + \sin x(-B - A - 2B) = -3\sin x + \cos x$$

$$\begin{cases} -3A + B = 1 \\ -A - 3B = -3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} B = 1 + 3A \\ -A - 3(1+3A) = -3 \Rightarrow -10A \cancel{-3} = \cancel{-3} \end{array}$$

$A = 0 \qquad B = 1 + 3A = 1.$

$$\Rightarrow \bar{y}_2 = A\cos x + B\sin x = \sin x$$

soluzione generale $\quad y = y_0 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2$

$$\tilde{y} = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \sin x \, .$$

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	Esercitazione 09 dicembre 2019

1. Sia $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\log(1+t^2)}{t^2+2}\,dt$. Allora $F'(4) =$

(a) $\frac{\log 17}{18}$ (b) $\frac{\log 17}{18} - \frac{\log 2}{3}$ ► (c) $\frac{\log 5}{24}$ (d) $\frac{\log 5}{7}$

2. La successione $a_n = \frac{1}{n^2+1}\left(\left(\log\frac{1}{n^2}\right) + \log(n^2+1)\right)$, definita per $n \geq 1$,

► (a) ha massimo ma non ha minimo (b) è debolmente crescente

(c) ha sia massimo che minimo (d) non è limitata inferiormente

3. Siano $y(x)$ e $z(x)$ le soluzioni dei problemi di Cauchy $\begin{cases} y' = x^2e^{-y} \\ y(0) = 7, \end{cases}$ $\begin{cases} z' = x^2e^{-z} \\ z(0) = 5. \end{cases}$ Allora $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) - z(x) =$

(a) 2 ► (b) 0 (c) $+\infty$ (d) $\log 2$

4. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(-1) = \alpha \\ y'(-1) = \beta. \end{cases}$ Per quali valori dei parametri reali α e β risulta $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$?

(a) per nessun valore di α e β ► (b) per ogni valore di α e β

(c) solo se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ (d) solo se $\alpha = 0$ e $\beta > 0$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \log(n!) - n\log n =$

(a) e (b) $+\infty$ (c) 0 ► (d) $-\infty$

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' = x^3 + 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -3. \end{cases}$ Allora risulta $y(1) =$

(a) -1 ► (b) $-\frac{97}{60}$ (c) $-\frac{157}{60}$ (d) $\frac{23}{60}$

7. La successione $a_n = \sqrt[n]{2^n + n(-1)^n}$

► (a) ha sia massimo che minimo (b) ha massimo ma non ha minimo

(c) ha minimo ma non ha massimo (d) non ha né massimo né minimo

8. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^{x^2} t^4 e^{t^2}\,dt$

(a) è concava (b) è debolmente crescente

► (c) è limitata inferiormente (d) ha un asintoto obliquo

9. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt[n]{ne^{n^2}}} =$$

(a) $\sqrt{e}$ (b) 1 (c) 0 ► (d) ∞

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,dx =$

(a) 0 (b) $\frac{\pi^2}{8}$ ► (c) $-\frac{1}{2}$ (d) -2

1) $$F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\log(1+t^2)}{t^2+2}\, dt \qquad F'(4) = ?$$

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

$$\beta(x) = \sqrt{x} \qquad \beta'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \alpha(x) = 1 \Rightarrow \alpha' = 0$$

$$F'(x) = \frac{\log(1+x)}{x+2} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$F'(4) = \frac{\log(1+4)}{4+2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{\log 5}{6 \cdot 4} = \frac{\log 5}{24}$$

2) $$a_n = \frac{1}{n^2+1}\left(\left(\log \frac{1}{n^2}\right) + \log(n^2+1)\right) \quad , n \geq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\infty}\left(\log \frac{1}{\infty} + \log \infty\right) = 0\,(\log 0 + \infty) =$$

$$= 0(-\infty + \infty)$$

$$\log a + \log b = \log(ab)$$

$$\log\left(\frac{1}{n^2}\right) + \log(n^2+1) = \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \log(1+t) = t + o(t) \text{ se } t \to 0$$

$$t = \frac{1}{n^2}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2+1}\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow a_n \text{ è limitata}$$

per capire se ha max e min devo sapere se

$a_n \geq 0$ o $a_n \leq 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{n^2+1} > 0 \qquad \frac{n^2+1}{n^2} > 1 \Rightarrow \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) > 0$$

$\Rightarrow a_n > 0 \quad \forall n \geq 1.$

$\Rightarrow \{a_n\}$ ha massimo ma <u>non ha minimo.</u>

perché?

perché $a_n > 0 \ \forall n$ e $\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Rightarrow \inf(a_n) = 0$

se avesse minimo sarebbe $\min(a_n) = \inf(a_n) = 0$

ma $a_n \neq 0 \ \forall n$.

3)
$$\begin{cases} y' = x^2 e^{-y} \\ y(0) = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = x^2 e^{-z} \\ z(0) = 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) - z(x) = ?$$

l'equazione differenziale è la stessa a variabili separabili.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 e^{-y} \Rightarrow \int e^y \, dy = \int x^2 \, dx + c$$

$$e^y = \frac{x^3}{3} + c \qquad y(0) = 7 \Rightarrow e^7 = \frac{0}{3} + c, \ c = e^7$$

$$e^y = \frac{x^3}{3} + e^7 \qquad y = \log\left(\frac{x^3}{3} + e^7\right)$$

$$\boxed{e^z = \frac{x^3}{3} + c}$$ è la stessa equazione, cambia solo c

$z(0) = 5 \Rightarrow e^5 = \frac{0}{3} + c \quad c = e^5$

$e^z = \frac{x^3}{3} + e^5 \qquad z = \log\left(\frac{x^3}{3} + e^5\right)$

$$y(x) - z(x) = \log\left(\frac{x^3}{3} + e^7\right) - \log\left(\frac{x^3}{3} + e^5\right) =$$

$$= \log\left(\frac{\frac{x^3}{3} + e^7}{\frac{x^3}{3} + e^5}\right) \longrightarrow \log 1 = 0 \text{ . per } x \to +\infty.$$

4) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(-1) = \alpha \\ y'(-1) = \beta \end{cases}$ per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$?

polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ radice doppia.

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

per trovare c_1 e c_2 devo usare le condizioni iniziali che dipendono da α e β. Mi serve?

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} = 0$$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.\right)$$

il limite è ∞ $\forall c_1, c_2$ quindi $\forall \alpha, \beta$.

5) $\lim_{n\to\infty} \log(n!) - n\log n = ?$

$$n\log n = \log(n^n)$$

$$\log(n!) - n\log n = \log(n!) - \log(n^n) = \log\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

$$\frac{n!}{n^n} \longrightarrow 0 \Rightarrow \log\left(\frac{n!}{n^n}\right) \to \log(0) = -\infty.$$

6) $\begin{cases} y'' = x^3 + 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$ $\qquad y(1) = ?$

$$y' = \int x^3 + 2x \, dx = \frac{x^4}{4} + x^2 + C \qquad y'(0) = -3$$

$$\Rightarrow -3 = \frac{0}{4} + 0 + C \Rightarrow C = -3$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x^4}{4} + x^2 - 3$$

$$\Rightarrow y = \int \frac{x^4}{4} + x^2 - 3 \, dx = \frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3} - 3x + d$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{0}{20} + \frac{0}{3} - 3\cdot 0 + d \qquad d = 1.$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3} - 3x + 1.$$

$$\Rightarrow y(1) = \frac{1}{20} + \frac{1}{3} - 3 + 1 = \frac{3 + 20 - 120}{60} = -\frac{97}{60}$$

7) $a_n = \sqrt[n]{2^n + n(-1)^n}$ max, min ?

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

$$a_n = \sqrt[n]{2^n\left(1+\frac{n(-1)^n}{2^n}\right)} = \sqrt[n]{2^n}\,\sqrt[n]{1+\boxed{\frac{n(-1)^n}{2^n}}} \longrightarrow \qquad \boxed{\frac{n(-1)^n}{2^n}} \to 0$$

$$\longrightarrow 2\cdot 1 = 2 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

devo vedere se $a_n \geq 2$ oppure $a_n \leq 2$.

$$\sqrt[n]{2^n+(-1)^n n} \geq 2 \quad ?$$

$$\cancel{2^n} + (-1)^n n \geq \cancel{2^n} \qquad (-1)^n n \geq 0$$

vera se n è pari, falsa se n è dispari.

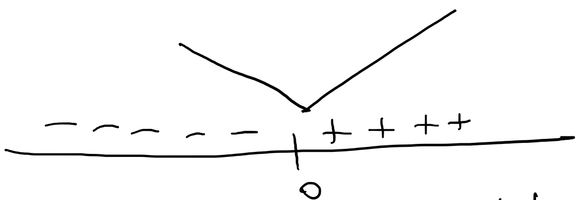
quindi se n è pari $a_n \geq 2$ se n è dispari $a_n \leq 2$ $\Rightarrow$ ha sia max che minimo.

8) $F(x) = \int_0^{x^2} t^4 e^{t^2}\,dt$

concava?
crescente?
limitata inf?
asintoto obliquo?

$$F'(x) = (x^2)^4 e^{(x^2)^2}\, 2x = x^8 e^{x^4}\cdot 2x$$

segno di F'



F ha minimo assoluto. $\Rightarrow$ F è limitata inf.

9) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt[n]{n e^{n^2}}} = +\infty .$$

$$\frac{n!}{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{e^{n^2}}} = \frac{n!}{\sqrt[n]{n}\cdot e^{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\;\frac{n!}{e^{n}} \longrightarrow \infty$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1 \qquad \frac{n!}{e^n} \to +\infty$$

10) $$\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx$$

$$\int x\cos(2x)\,dx = x\cdot\frac{\sin(2x)}{2} - \int 1\cdot\frac{\sin(2x)}{2}\,dx =$$

$$= \frac{x\sin(2x)}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos(2x)}{2} = \frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx = \left[\frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi/2\;\cancel{\sin(\pi)}}{2} + \frac{\cos\pi}{4} - \left(\cancel{\frac{0\cdot\sin(0)}{2}} + \frac{\cos(0)}{4}\right) =$$

$$= \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$