Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	Esercitazione 04 dicembre 2019

1. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \cos^2 y \cos x \\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ Allora $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) =$

(a) 0 (b) $\arctan\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ (c) $\dfrac{\pi}{4}$ ▶ (d) $\arctan 2$

2. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 8y' + 17y = 0 \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4e^{-\pi} \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2e^{-\pi}. \end{cases}$ Allora $\lim_{x\to+\infty} y(x) =$

(a) non esiste (b) $\dfrac{\pi}{2}$ ▶ (c) 0 (d) $+\infty$

3. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -15. \end{cases}$ Allora risulta che $\lim_{x\to+\infty} y(x) =$

(a) 0 ▶ (b) $-\infty$ (c) $+\infty$ (d) non esiste

4. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = x^4 y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$ Allora $y(-1) =$

(a) 8 (b) 0 (c) $\dfrac{5}{4}$ ▶ (d) $\dfrac{5}{6}$

5. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 6y' + 18y = 0 \\ y(-\frac{\pi}{2}) = -2e^{\frac{3\pi}{2}} \\ y'(-\frac{\pi}{2}) = -9e^{\frac{3\pi}{2}}. \end{cases}$ Allora $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) $2e^{-\frac{3\pi}{2}}$ ▶ (d) non esiste

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 9. \end{cases}$ Allora $y(2) =$

(a) $\dfrac{19}{e^{10}}$ (b) 65 ▶ (c) $\dfrac{7}{e^{10}}$ (d) $\dfrac{-14}{e^{10}}$

7. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x^2} + e^{\frac{x^2-1}{x}} \\ y(1) = \dfrac{e+4}{e}. \end{cases}$ Allora $\lim_{x\to0^+} y(x) =$

(a) $-\infty$ (b) 1 ▶ (c) 0 (d) 4

8. Sia y una qualsiasi soluzione dell'equazione differenziale $y' = 6yx^2 + x^2$. Allora $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$

(a) $-\infty$ ▶ (b) $-\dfrac{1}{6}$
(c) 0 (d) dipende dalla soluzione scelta

9. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y^2(x^2+1)} \\ y(0) = \sqrt[3]{3}. \end{cases}$ Allora $\lim_{x\to+\infty} y(x) =$

(a) $\sqrt[3]{3}$ (b) 0 ▶ (c) $+\infty$ (d) $-\infty$

10. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -2xy \\ y(1) = \dfrac{3}{e}. \end{cases}$ Allora $y(0) =$

(a) $\dfrac{3-e}{3}$ (b) -1 (c) $3-e$ ► (d) 3

Esercizio 3 Si trovi l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3x + 1).$$

Soluzione

Risolviamo prima l'equazione omogenea associata

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2$$

che ha radici

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \{1, 2\}.$$

L'integrale generale dell'omogenea è quindi

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Troviamo ora una soluzione particolare con il metodo di somiglianza. Dato che il termine noto contiene e^{2x} e 2 è radice del polinomio caratteristico, siamo in presenza di risonanza e cercheremo una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = x(Ax + B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}.$$

Derivando due volte la soluzione abbiamo

$$\bar{y}'(x) = (2Ax + B)e^{2x} + (Ax^2 + Bx)2e^{2x} = e^{2x}(2Ax^2 + (2A + 2B)x + B)$$

$$\bar{y}''(x) = 2e^{2x}(2Ax^2 + (2A + 2B)x + B) + e^{2x}(4Ax + 2A + 2B) = e^{2x}(4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B).$$

Sostituiamo ora nell'equazione completa ottenendo

$$e^{2x}(4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B) - 3e^{2x}(2Ax^2 + (2A + 2B)x + B) + 2(Ax^2 + Bx)e^{2x} = e^{2x}(3x + 1).$$

Dividendo per e^{2x} abbiamo

$$(4A - 6A + 2A)x^2 + (8A + 4B - 6A - 6B + 2B)x + 2A + 4B - 3B = 3x + 1.$$

Applicando il principio di identità dei polinomi otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2A = 3 \\ 2A + B = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A = \frac{3}{2},\ B = -2$. La soluzione particolare sarà quindi

$$\bar{y}(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x\right)e^{2x}$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x\right)e^{2x}.$$

1) $\begin{cases} y' = \cos^2 y \cos x \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

variabili separabili $\quad \frac{dy}{dx} = \cos^2 y \cos x$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \cos x \, dx + c$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \operatorname{tg} y \qquad \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\operatorname{tg} y = \sin x + c$$

trovo c usando $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

sostituisco $y = \frac{\pi}{4}$, $x = 0$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \sin 0 + c \iff 1 = c$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} y = \sin x + 1$$

$$y = \operatorname{arctg}(\sin x + 1)$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) + 1\right) = \operatorname{arctg} 2$$

---

2) $\begin{cases} y'' + 8y' + 17y = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4e^{-\pi} \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{-\pi} \end{cases}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} y(x) = ?$

omogenea $\quad y'' + 8y' + 17y = 0$

polinomio caratteristico $\lambda^2 + 8\lambda + 17 = 0$

$\lambda = -4 \pm \sqrt{16-17} = -4 \pm \sqrt{-1} = -4 \pm i$

$\lambda_1 = -4+i \quad , \lambda_2 = -4-i$

$$\boxed{y(x) = e^{-4x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)}$$ soluzione generale.

radici coniugate $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$

soluzione $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$.

dovrei trovare c_1 e c_2

ma devo calcolare $\lim_{x \to +\infty} y(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-4x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) = e^{-\infty}(\text{limitata}) = 0$$

qualunque sia il valore di c_1 e c_2.

3) $\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -15 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x \to \infty} y(x) = ?$

polinomio caratteristico $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ -\frac{8}{2} = -4 \end{cases}$$

soluzione generale $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-4x}$

il limite dipende dal valore di c_1.

$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2$

$y'(x) = c_1 e^x - 4c_2 e^{-4x}$ (ho derivato ✓)

$y'(0) = c_1 - 4c_2$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 4c_2 = -15 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ -c_2 - 4c_2 = -15 \end{array}$$

$\Rightarrow -5c_2 = -15 \quad c_2 = 3 \Rightarrow c_1 = -3$

soluzione del problema di Cauchy è

$y(x) = -3e^x + 3e^{-4x}$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = -3e^{\infty} + 3e^{-\infty} = -\infty + 0 = -\infty.$$

4) $\begin{cases} y' = x^4 y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad y(-1) = ?$

a variabili separabili $\quad \frac{dy}{dx} = x^4 y^2$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x^4 \, dx + c$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} \qquad \int x^4 dx = \frac{x^5}{5}$$

$-\frac{1}{y} = \frac{x^5}{5} + c \qquad$ trovo c usando $y(0) = 1$.

$-\frac{1}{1} = \frac{0^5}{5} + c \qquad c = -1$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^5}{5} - 1 \Rightarrow \frac{1}{y} = 1 - \frac{x^5}{5} = \frac{5 - x^5}{5}$$

$$y = \frac{5}{5-x^5} \qquad y(-1) = \frac{5}{5-(-1)^5} = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$$

---

5) $$\begin{cases} y'' + 6y' + 18y = 0 \\ y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{3\pi}{2}} \\ y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9e^{\frac{3\pi}{2}} \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x) = ?$$

polinomio caratteristico $\lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0$

$$\lambda = -3 \pm \sqrt{9-18} = -3 \pm \sqrt{-9} = -3 \pm 3i$$

soluzione $y = e^{-3x}\left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right)$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-3x}\left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right) = \infty \lim(\ldots)$$

avrebbe limite solo se $c_1 = c_2 = 0$
altrimenti non ha limite.

è possibile che sia $c_1 = c_2 = 0$?
Se fosse così sarebbe $y(x) = 0 \quad \forall x$

ma $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{3\pi}{2}} \neq 0$

quindi c_1 o c_2 è $\neq 0 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to-\infty} y(x)$.

---

6) $$\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 9 \end{cases} \qquad y(2) = ?$$

polinomio caratteristico $\lambda^2+10\lambda+25=0$

$(\lambda+5)^2=0 \quad \lambda=-5$ con molteplicità 2

soluzione $y=c_1 e^{-5x}+c_2 x e^{-5x}$ derivo questa

$y(0)=c_1\cdot e^0+c_2\cdot 0\cdot e^0=c_1$

$y'=-5c_1 e^{-5x}+c_2 e^{-5x}-5c_2 x e^{-5x}$

$y'(0)=-5c_1 e^0+c_2 e^0-5c_2\cdot 0\cdot e^0=-5c_1+c_2$

$$\begin{cases} c_1=-1 \\ -5c_1+c_2=9 \end{cases} \qquad -5(-1)+c_2=9 \Rightarrow 5+c_2=9$$

$c_2=4$

$\Rightarrow y(x)=-e^{-5x}+4xe^{-5x}$

$y(2)=-e^{-10}+4\cdot 2\, e^{-10}=7\cdot e^{-10}=\dfrac{7}{e^{10}}$

---

7) $$\begin{cases} y'=\dfrac{y}{x^2}+e^{\frac{x^2-1}{x}} \\ y(1)=\dfrac{e+4}{e} \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^+} y(x)=?$$

eq. lineare $y=a(x)y+b(x) \quad a(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$b(x)=e^{\frac{x^2-1}{x}}$

$A(x)=\int a(x)\,dx=\int \dfrac{1}{x^2}\,dx=-\dfrac{1}{x}$

$$\int e^{-A(x)} b(x)\,dx = \int e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{x^2-1}{x}}\,dx =$$

$$= \int e^{\frac{1}{x}+\frac{x^2-1}{x}}\,dx = \int e^{\frac{x^2}{x}}\,dx = \int e^{x}\,dx = e^{x}$$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(\int e^{-A(x)} b(x)\,dx + c\right) =$$

$$= e^{-\frac{1}{x}}\left(e^{x}+c\right)$$

dovrei trovare c. Serve?

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = e^{-\frac{1}{0^+}}\left(e^{0}+c\right) = e^{-\infty}(1+c) = 0$$

per qualsiasi valore di c.

---

8) $y' = 6yx^2 + x^2$. y è una soluzione qualsiasi dell'equazione differenziale.

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = ?$$

equazione è lineare $a(x) = 6x^2$, $b(x) = x^2$

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 6x^2\,dx = 2x^3$$

$$\int e^{-A(x)} b(x)\,dx = \int e^{-2x^3} \underbrace{x^2\,dx}$$

sostituzione $-2x^3 = t$ $\quad \frac{dt}{dx} = -6x^2$

$$x^2\,dx = -\frac{dt}{6}$$

$$= \int e^t \left(-\frac{dt}{6}\right) = -\frac{1}{6}\int e^t\,dt = -\frac{1}{6}e^t = -\frac{1}{6}e^{-2x^3}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{A(x)}\left(\int e^{-A(x)} b(x)\,dx + c\right) =$$

$$= e^{2x^3}\left(-\frac{1}{6}e^{-2x^3} + c\right) = -\frac{1}{6} + c\,e^{2x^3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\frac{1}{6} \quad \text{per qualsiasi } c.$$

<u>Osservazione</u> $\quad y' = 6yx^2 + x^2 = x^2(6y+1)$

è anche a variabili separabili.

otterrò lo stesso risultato.

$$\frac{dy}{dx} = x^2(6y+1) \Rightarrow \int \frac{dy}{6y+1} = \int x^2\,dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{\log|6y+1|}{6} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\log|6y+1| = 2x^3 + c$$

devo "togliere" il valore assoluto.

ma non ho condizione iniziale.

Caso 1) Se $6y+1>0$ cioè $y>-\frac{1}{6}$ allora

$|6y+1| = 6y+1 \Rightarrow$ la soluzione è

$$\log(6y+1) = 2x^3 + c$$

$$6y+1 = e^{2x^3+c} \qquad y = \frac{e^{2x^3+c} - 1}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} y(x) = \frac{e^{-\infty} - 1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Caso 2) $6y+1<0$ cioè $y < -\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow |6y+1| = -6y-1$$

$$\log(-6y-1) = 2x^3 + c$$

$$\Rightarrow -6y-1 = e^{2x^3+c}$$

$$\Rightarrow 6y = -1 - e^{2x^3+c} \Rightarrow y = \frac{-1-e^{2x^3+c}}{6}$$

però $\lim_{x \to -\infty} y(x) = \frac{-1-e^{-\infty}}{6} = -\frac{1}{6}$.

Caso 3) $6y+1=0 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}$

c'è la soluzione costante $y = -\frac{1}{6}$

$y' = (6y+1)x^2$ se $y = -\frac{1}{6} \Rightarrow y' = 0 \cdot x^2$

$y'=0$ y costante o.k.

ma anche in questo caso $\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\frac{1}{6}$.

---

g) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y^2(x^2+1)} \\ y(0) = \sqrt[3]{3} \end{cases}$ $\lim_{x \to +\infty} y(x) = ?$

è a variabili separabili.

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2(x^2+1)} \Rightarrow \int y^2 dy = \int \frac{x}{x^2+1} dx + c$

$\frac{y^3}{3} = \frac{\log|x^2+1|}{2} + c$ $x^2+1 \geq 0$ $\Rightarrow$ non serve $|\dots|$

$\frac{y^3}{3} = \frac{\log(x^2+1)}{2} + c$

$y^3 = \frac{3}{2} \log(x^2+1) + 3c$

$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \log(x^2+1) + 3c}$

$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \log(x^2+1) + 3c} = +\infty$

per qualsiasi valore di c

non serve trovare c.

10) $\begin{cases} y' = -2xy \\ y(1) = \frac{3}{e} \end{cases}$ $\quad y(0) = ?$

è sia lineare che a variabili separabili.

trattiamola come lineare

$a(x) = -2x \qquad b(x) = 0$

$A(x) = \int a(x)\,dx = \int -2x\,dx = -x^2$

$\int e^{-A(x)} b(x)\,dx = \int e^{x^2} \cdot 0\,dx = 0$

$y(x) = e^{A(x)} \left(\int e^{-A(x)} b(x)\,dx + c \right) =$

$= e^{-x^2}(0+c) = c\,e^{-x^2}$

trovo c usando $y(1) = \frac{3}{e}$, $x=1, y=\frac{3}{e}$

$\frac{3}{e} = c\,e^{-1} \qquad c = 3$

$\Rightarrow y(x) = 3e^{-x^2} \Rightarrow y(0) = 3 \cdot e^0 = 3.$

Es: Trovare l'integrale generale di

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3x+1).$$

Soluzione: omogenea $y'' - 3y' + 2y = 0$

polinomio caratt. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

soluzione omogenea

$$y_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}.$$

soluzione particolare.

$$f(x) = e^{2x}(3x+1)$$

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)\right)$$

trovare α, β, p, q.

$\alpha = 2$, $\beta = 0$, $p(x) = 3x+1$, $q(x) = 0$

controllo se $\alpha + i\beta$ è radice del polinomio caratteristico.

$\alpha + i\beta = 2$ è radice con molteplicità 1.

allora $m=1$.

$\bar{y}$ è della forma

$1 = \cos 0$ $\quad\quad$ $\sin 0 = 0$

$$\bar{y} = e^{\alpha x} \cdot x^m \left(r(x) \cos(\beta x) + \cancel{s(x) \sin(\beta x)} \right)$$

con grado r = grado s = $\max\{\text{grado}(p), \text{grado}(q)\}$

grado $p = 1$ $\quad$ grado $q = 0$.

$\Rightarrow$ r e s sono di grado 1, cioè

$r(x) = Ax + B$, $s(x) = Cx + D$ non mi interessa perché $\beta = 0$

$$\bar{y} = e^{2x} \cdot x^1 (Ax+B) = e^{2x}(Ax^2 + Bx)$$

derivo $\bar{y}$ due volte per sostituirla nell'equazione.

$$\bar{y}' = 2e^{2x}(Ax^2+Bx) + e^{2x}(2Ax+B) =$$

$$= e^{2x}\left(2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B\right) =$$

$$= e^{2x}\left(2Ax^2 + (2B+2A)x + B\right)$$

$$\bar{y}'' = 2e^{2x}\left(2Ax^2 + (2B+2A)x + B\right) +$$

$$+ e^{2x}\left(4Ax + 2B + 2A\right)$$

la sostituisco in $\bar{y}'' - 3\bar{y}' + 2\bar{y} = e^{2x}(3x+1)$

$$\cancel{e^{2x}}\left[4Ax^2+(4B+4A)x+2B+4Ax+2B+2A\right]$$

$$-3\cancel{e^{2x}}\left(2Ax^2+(2B+2A)x+B\right)+2\cancel{e^{2x}}\left(Ax^2+Bx\right)=$$

$$=\cancel{e^{2x}}(3x+1)$$

$$\underbrace{4Ax^2-6Ax^2+2Ax^2}+\underbrace{(4B+4A)}x+\underbrace{4A}x+\underbrace{(-6B-6A)}x+$$

$$+2B+\underbrace{2B}x+2B+2A-3B=3x+1$$

$$\begin{cases}4A-6A+2A=0\\4B+4A+4A-6B-6A+2B=3\\2B+2B+2A-3B=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}0=0\\2A=3\\2A+B=1\end{cases}\qquad A=\frac{3}{2}$$

$$2\cdot\frac{3}{2}+B=1\qquad 3+B=1\qquad B=-2$$

$$\Rightarrow \bar{y}=e^{2x}(Ax^2+Bx)=e^{2x}\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)$$

$$\Rightarrow y=y_0+\bar{y}=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+e^{2x}\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right).$$