Numeri complessi.

L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$

Se $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = a + ib \quad , a, b \in \mathbb{R}$

$a = \mathrm{Re}(z)$ parte reale

$b = \mathrm{Im}(z)$ parte immaginaria

Facciamo vedere che un polinomio di secondo grado ha sempre 2 radici in $\mathbb{C}$.

$$x^2 + 6x + 13 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + 13 = (x+3)^2 + 4 = (x+3)^2 - (2i)^2 =$$

$$= (x+3+2i)(x+3-2i)$$

$\Rightarrow$ $x = -3-2i$, $x = -3+2i$ radici del polinomio sono numeri complessi.

Si trovano anche dalla formula risolutiva

$$x^2 + 6x + 13 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} =$$

$$= \frac{-6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = \begin{cases} -3+2i \\ -3-2i \end{cases}$$

<u>Def</u>: Dato $z = a + ib$ il numero complesso $\bar{z} = a - ib$ si dice <u>coniugato</u> di z.

Oss: Se un polinomio a coefficienti in $\mathbb{R}$ non ha radici reali, ha sempre 2 radici in $\mathbb{C}$ coniugate fra loro.

Eq. diff. lineari del 2° ordine omogenee.

Polinomio caratteristico senza radici reali.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \text{senza radici reali.}$$

Ci sono 2 radici complesse

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad , \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Le due soluzioni fondamentali dell'equazione $y'' + ay' + by = 0$ sono

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad , \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

La soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x) \right).$$

ES: $y'' + y = 0$

polinomio caratt. $\lambda^2 + 1 = 0$

radici $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

$\alpha = 0$, $\beta = 1$

$$i = 0 + 1 \cdot i$$
$$-i = 0 - 1 \cdot i$$

$$y(x) = e^{0 \cdot x}\left(c_1 \cos(1 \cdot x) + c_2 \sin(1 \cdot x)\right) =$$
$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

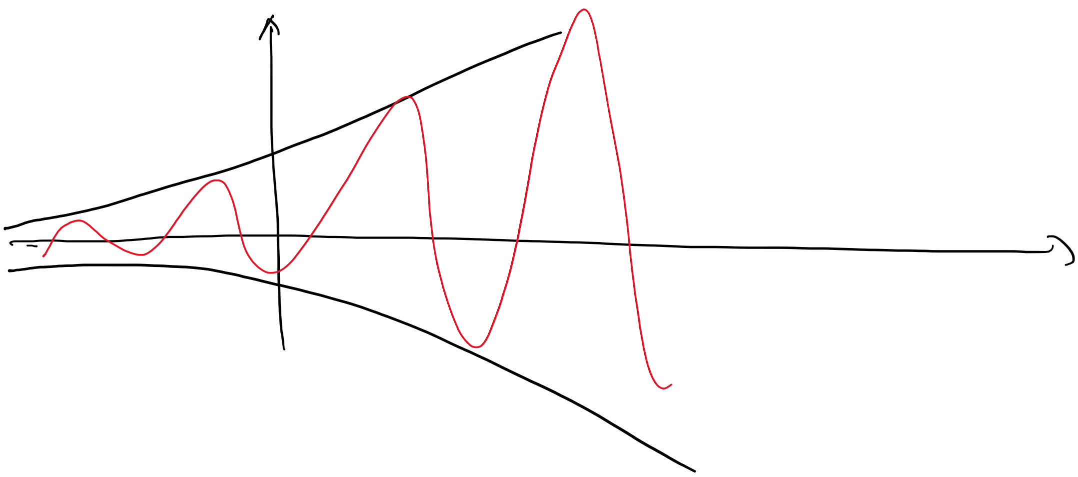
Es: $y'' - 4y' + 13y = 0$

polin. caratt. $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$$

soluzione fondamentale

$$y(x) = e^{2x}\left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right).$$



Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

radici $\lambda = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$ $, \alpha = 1, \beta = 1.$

Soluzione generale

$$y(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

trovo c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali

$$y(0) = e^0 (c_1 \cos 0 + c_2 \cancel{\sin 0}) = 1 \cdot c_1 = c_1$$

per usare la seconda condizione devo calcolare $y'(x)$. Derivo $y(x)$

$$y'(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^x (-c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

$$y'(0) = 1 \cdot (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) + 1 (-c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1) =$$

$$= c_1 + c_2$$

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 - c_1 = -1 \end{array}$$

sostituisco nella soluzione generale

$$y_1 = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) = \boxed{e^x (2 \cos x - \sin x)}$$

soluzione del problema di Cauchy.

Equazione completa
(non omogenea)

$$(*) \quad y'' + a y' + b y = f \qquad \text{con } f \neq 0$$

Supponiamo di avere trovato una soluzione di $(*)$ che chiamiamo $\bar{y}$.

Prendiamo una soluzione y_0 dell'omogenea

$$y_0'' + a y_0' + b y_0 = 0$$

Allora se indico con $y = y_0 + \bar{y}$ ottengo che y risolve $(*)$.

Infatti

$$y'' + a y' + b y = (\bar{y} + y_0)'' + a(\bar{y} + y_0)' + b(\bar{y} + y_0) =$$

$$= \underbrace{\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y}}_{f} + \underbrace{y_0'' + a y_0' + b y_0}_{0} = f + 0 = f.$$

Tutte le soluzioni dell'equazione completa

$$y'' + a y' + b y = f$$

si ottengono sommando una soluzione della completa con una qualsiasi soluzione dell'omogenea.

$\bar{y}$ si chiama <u>soluzione particolare</u>.

Come si trova $\bar{y}$?

Useremo il metodo di somiglianza (o dei coefficienti indeterminati).

Si applica solo a f di un tipo speciale.

f deve essere della forma

$$(**) \quad f(x) = e^{\alpha x}\left(p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)\right)$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, p e q sono polinomi.

osserviamo che posso essere presenti contemporaneamente sin e cos ma devono avere la stessa frequenza

Es: $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x)$ non è della forma giusta.

Se f è della forma $(**)$ cerco una soluzione particolare $\bar{y}$ della forma

$$\bar{y}(x) = x^m e^{\alpha x}\left[r(x)\cos(\beta x) + s(x)\sin(\beta x)\right]$$

r, s sono polinomi incogniti con

$$\text{grado}(r) = \text{grado}(s) = \max\{\text{grado}(p), \text{grado}(q)\}$$

m è la molteplicità di $\alpha + i\beta$ come radice del polinomio caratteristico.

Se $\alpha + i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico allora $m = 0$.

Cosa si intende per molteplicità di una radice?

$(\lambda - 3)^2 = 0$ $\quad$ $\lambda = 3$ è radice con molteplicità 2.

$(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$ $\quad$ $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$ sono radici con molteplicità 1.

Es: $y'' + 4y = \sin x$

omogenea $\quad y'' + 4y = 0$

polinomio caratteristico $\quad \lambda^2 + 4 = 0$

radici $\quad \lambda_1 = 2i \quad \lambda_2 = -2i$

soluzione omogenea

$$y_0(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

non c'è esponenziale perché la parte reale delle radici è $\emptyset$.

Troviamo la soluzione particolare.

$f(x) = \sin x$

per averla della forma generale

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)\right)$$

per ottere $f(x) = \sin x$ come devo scegliere α, β, p, q?

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $p \equiv 0$ $q(x) = 1$

$\alpha + i\beta$ è radice del polinomio caratterist.?

$\alpha + i\beta = 0 + 1 \cdot i = i$ non è radice.

$\Rightarrow m = 0$.

grado $(p) = 0$ grado$(q) = 0$

allora cerco 2 polinomi $r(x)$ e $s(x)$ di grado 0. (polinomi incogniti).

Cioè $r(x) = A$, $s(x) = B$

con A e B da determinare.

$$\bar{y}(x) = x^m e^{\alpha x}\left[r(x)\cos(\beta x) + s(x)\sin(\beta x)\right]$$

$$= x^0 \cdot e^{0 \cdot x}\left[A\cos(1 \cdot x) + B\sin(1 \cdot x)\right] =$$

$$= A\cos x + B\sin x$$

ora devo trovare A e B.

Sostituisco $\bar{y}$ nell'equazione completa

$$\bar{y}'' + 4\bar{y} = \sin x$$

per sostituire mi servono $\bar{y}'$ e $\bar{y}''$

$$\bar{y} = A\cos x + B\sin x$$

$$\bar{y}' = -A\sin x + B\cos x$$

$$\bar{y}'' = -A\cos x - B\sin x$$

$$(-A\cos x - B\sin x) + 4(A\cos x + B\sin x) = \sin x$$

$$3A\cos x + 3B\sin x = \sin x + 0 \cdot \cos x$$

uguaglio i coeff. di $\cos x$ e di $\sin x$

$$\begin{cases} 3A = 0 \\ 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 0 \\ B = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = A\cos x + B\sin x = \frac{1}{3}\sin x$$

soluzione generale della completa è

$$y = y_0 + \bar{y} = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin x.$$

Es: $y'' + 4y = \sin(2x)$

omogenea $\quad y'' + 4y = 0 \qquad \lambda^2 + 4 = 0$

$\boxed{\lambda = \pm 2i}$ $\quad y_0 = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$

$f(x) = \sin(2x)$ deve essere della forma

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)\right).$$

quindi $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $p(x) = 0$, $q(x) = 1$.

$\alpha + i\beta = 2i$ che è radice del polinomio caratteristico con molteplicità 1

allora $m = 1$, grado(p) = grado$(q) = 0$

quindi grado $r(x)$ = grado $s(x) = 0$

cioè $\quad r(x) = A$, $s(x) = B$

$$\bar{y} = e^{\alpha x} \cdot x^m \left(r(x)\cos(\beta x) + s(x)\sin(\beta x)\right) =$$

$$= x\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right)$$

devo sostituire nell'equazione allora calcolo $\bar{y}'$ e $\bar{y}''$

$$\bar{y}' = A\cos(2x) + B\sin(2x) + x\left(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)\right)$$

$$\bar{y}'' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \left(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)\right)$$
$$+ x\left(-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)\right)$$

devo sostituire in $\bar{y}'' + 4\bar{y} = \sin(2x)$

$$\overbrace{-4A\sin(2x)+4B\cos(2x)-\cancel{4Ax\cos(2x)}-\cancel{4Bx\sin(2x)}}^{\bar{y}''}$$

$$+4\underbrace{\left(\cancel{Ax\cos(2x)}+\cancel{Bx\sin(2x)}\right)}_{\bar{y}} = \sin(2x)$$

$$-4A\sin(2x)+4B\cos(2x)=\sin(2x)$$

$$\begin{cases} -4A=1 \\ 4B=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A=-\frac{1}{4} \\ B=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\bar{y} = x\left(A\cos(2x)+B\sin(2x)\right) = -\frac{1}{4}x\cos(2x)$$

$$\Rightarrow \quad y = y_0+\bar{y} = c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)-\frac{1}{4}x\cos(2x)$$

soluzione generale. di $y''+4y=\sin(2x)$

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''-y = e^x \\ y(1)=0 \\ y'(1)=\frac{e}{2} \end{cases}$$

omogenea $\quad y''-y=0$

polin. caratt. $\quad \lambda^2-1=0$

radici $\quad \lambda=\pm 1$.

soluzione omogenea $\quad y_0 = c_1e^x+c_2e^{-x}$

soluzione particolare $\bar{y}$.

$f(x) = e^x$

va portata nella forma generale

$f(x) = e^{\alpha x}\left(p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)\right)$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $p(x) = 1$, $q(x) = 0$.

$\alpha + i\beta = 1$ che è radice del polinomio caratteristico con molteplicità 1.

$m = 1$ grado s = grado r = 0, $r(x) = A$, $s(x) = B$

$\Rightarrow \bar{y} = e^{\alpha x} \cdot x^m \left(r(x) \underbrace{\cos(\beta x)}_{1} + s(x) \underbrace{\sin(\beta x)}_{0} \right) =$ se $\beta = 0$

$= e^x \cdot x A$

calcolo $\bar{y}'$ e $\bar{y}''$

$\bar{y}' = A e^x + A x e^x$

$\bar{y}'' = A e^x + A e^x + A x e^x = 2 A e^x + A x e^x$

sostituisco in $\bar{y}'' - \bar{y} = e^x$

$\underbrace{2Ae^x + \cancel{Axe^x}}_{\bar{y}''} - \underbrace{\cancel{Axe^x}}_{\bar{y}} = e^x$

$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \bar{y} = Axe^{x} = \frac{1}{2}xe^{x}$

$\Rightarrow \quad y = y_0 + \bar{y} = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{x}$

soluzione generale dell'equazione completa.

Ora trovo c_1 e c_2.

mi serve $\quad y' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}xe^{x}$

$y(1) = c_1 \cdot e + c_2 e^{-1} + \frac{1}{2}e$

$y'(1) = c_1 e - c_2 e^{-1} + \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e = c_1 e - c_2 e^{-1} + e$

le condizioni iniziali sono $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = \frac{e}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 e + c_2 e^{-1} + \frac{1}{2}e = 0 \\ c_1 e - c_2 e^{-1} + e = \frac{e}{2} \end{cases}$

sommo le due equazioni

$\Rightarrow \quad 2c_1 e + \frac{3}{2}e = \frac{e}{2} \Rightarrow 2c_1 e = -e \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$

sostituisco nella prima equazione

$\cancel{-\frac{1}{2}e} + c_2 e^{-1} \cancel{+\frac{1}{2}e} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$

$\Rightarrow$ soluzione del problema di Cauchy è

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{x} = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}xe^{x}$.