Eq. differenziali lineari.

$$y' = a(x)\,y + b(x)$$

soluzione

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx + c \right)$$

$$A(x) = \int a(x)\, dx \,.$$

Es: $y' = x^2 y + x^2$ $\quad a(x) = x^2 \quad b(x) = x^2$

a $\quad$ b

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

devo calcolare

$$\int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx = \int e^{-\frac{x^3}{3}}\, \underbrace{x^2\, dx}$$

sostituzione $\quad x^3 = t \quad \frac{dt}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dt = 3x^2\, dx$

$$x^2\, dx = \frac{dt}{3}$$

$$\int e^{-\frac{t}{3}}\, \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int e^{-\frac{t}{3}}\, dt = \frac{1}{3}\, e^{-\frac{t}{3}}\, (-3) =$$

$$= -e^{-\frac{t}{3}} = -e^{-\frac{x^3}{3}}$$

t

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx + c \right) =$$

$$= e^{\frac{x^3}{3}}\left(-e^{-\frac{x^3}{3}}+c\right) = \boxed{-1+c\,e^{\frac{x^3}{3}}}$$ soluzione.

Considero il problema di Cauchy associato all'equazione precedente

$$\begin{cases} y' = x^2 y + x^2 & \leftarrow \text{equazione precedente} \\ \boxed{y(3) = 2} & \leftarrow \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

serve a trovare c

Sostituisco $x=3$ e $y=2$ nella soluzione generale e ricavo c.

$$y(x) = -1 + c\,e^{\frac{x^3}{3}}$$ sostituisco

$$2 = -1 + c\,e^{\frac{3^3}{3}} = -1 + c\,e^{9}$$

ricavo c

$$3 = c\,e^9 \qquad c = \frac{3}{e^9}$$

$\Rightarrow$ soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -1 + \frac{3}{e^9}\,e^{\frac{x^3}{3}} = \boxed{-1+3\,e^{\frac{x^3}{3}-9}}$$

Proviamo a cambiare la condizione iniziale

$$\begin{cases} y' = x^2 y + x^2 \\ y(3) = -1 \end{cases}$$

soluzione generale $y(x) = -1 + c\, e^{\frac{x^3}{3}}$

sostituisco $x=3$ $y=-1$

$$-1 = -1 + c\, e^{\frac{3^3}{3}} \Rightarrow 0 = c\, e^{9} \Rightarrow \boxed{c=0}$$

soluzione $y(x) = -1$ costante.

Equazioni a variabili separabili

$$\begin{cases} y' = a(x) f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Problema di Cauchy.

dipende solo da x

dipende solo da y

potete "separare" le variabili

a e f sono funzioni continue.

Supponiamo che sia $f(y_0) \neq 0$.

f è continua $\Rightarrow f(y) \neq 0$ in un intorno di y_0. Divido per $f(y)$.

dipende solo da y

solo da x

$$\frac{y'}{f(y)} = a(x)$$

ho separato le variabili

Posso trovare una primitiva di $\frac{1}{f(y)}$ cioè una funzione $G(y)$ t.c. $G'(y) = \frac{1}{f(y)}$

Posso trovare anche una primitiva di $a(x)$ cioè $A(x)$ t.c. $A'(x) = a(x)$.

Ma y è funzione di x allora calcolo

$$\frac{d}{dx}\left(G(y(x))\right) = \frac{dG}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(y)} \cdot y'$$

l'equazione è $\frac{y'}{f(y)} = a(x)$ cioè

$$\frac{d}{dx}\left(G(y(x))\right) = a(x)$$

integro in dx

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx} G(y(x))\, dx = \int a(x)\, dx + c$$

cioè $G(y(x)) = A(x) + c$ ← soluzione in forma implicita

devo ricavare $y(x)$. In teoria è sempre possibile perché $G' = \frac{1}{f} \neq 0$ allora $G' > 0$ oppure $G' < 0$ in un intorno di y_0.

$\Rightarrow$ G è strettamente monotona in un intorno di y_0.

$\Rightarrow$ G è invertibile in un intorno di y_0.
allora da $G(y(x)) = A(x)+c$ ricavo

$$\boxed{y(x) = G^{-1}(A(x)+c)}$$

soluzione in forma esplicita.

<u>Oss</u>: la dimostrazione dell'esistenza della <u>soluzione</u> è locale, cioè vale in un intorno di y_0. Quindi la soluzione esiste sicuramente in un intorno di x_0 ma non posso essere sicuro che esista $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Def</u>: L'intervallo massimale di esistenza della soluzione è il più grande <u>intervallo</u> che contiene il punto x_0, dove la soluzione è definita.

Cosa succede se $f(y_0)=0$?

$$\begin{cases} y' = a(x) f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

c'è una soluzione immediata.

$y(x) = y_0$ costante.

infatti, sostituendo $y'(x)=0$ perché y è costante

$\Rightarrow \quad 0 = a(x) \cdot f(y_0) = a(x) \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow 0=0 \quad \Rightarrow$ è soluzione.

ovviamente risolve anche la condizione iniziale $y(x_0)=y_0$.

Metodo pratico per ricordarsi la formula risolutiva

$$y' = a(x) f(y)$$

scrivete $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = a(x) f(y)$$

portate tutte le y a sinistra e le x a destra

$$\frac{dy}{f(y)} = a(x)\, dx$$

integrate

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int a(x)\, dx + c$$

(equivale a dire $G(y) = A(x) + c$)

Es: $\begin{cases} y' = -\left(\dfrac{6x+3}{x^2+x+1}\right)(y-1)^2 \\ y(0) = \dfrac{3\log 3 - 1}{3\log 3} \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{6x+3}{x^2+x+1}\right)(y-1)^2$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int -\frac{6x+3}{x^2+x+1}\,dx + c$$

calcolo separatamente i 2 integrali.

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int (y-1)^{-2}\,dy = -(y-1)^{-1} = -\frac{1}{y-1}$$

$$-\int \frac{6x+3}{x^2+x+1}\,dx = -3\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = -3\log|x^2+x+1|$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y-1} = -3\log|x^2+x+1| + c$$

posso liberarmi del valore assoluto?

La soluzione è definita in un intorno del punto x_0, quindi l'argomento del valore assoluto avrà lo stesso segno che nel punto x_0 (per il th. sulla permanenza del segno).

Nel nostro caso $x_0 = 0 \Rightarrow x^2+x+1$ nel punto $x=0$ diventa $0+0+1=1>0$

$$\Rightarrow |x^2+x+1| = x^2+x+1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y-1} = -3\log(x^2+x+1)+c$$

posso ricavare c dalla condizione

$$y(0) = \frac{3\log 3 - 1}{3\log 3} = 1 - \frac{1}{3\log 3}$$

sostituisco $x=0$ e $y = 1 - \frac{1}{3\log 3}$

$$-\frac{1}{\cancel{1} - \frac{1}{3\log 3} - \cancel{1}} = -3\cancel{\log(0+0+1)}+c$$

$$3\log 3 = c$$

Soluzione in forma implicita è

$$-\frac{1}{y-1} = -3\log(x^2+x+1) + 3\log 3 \quad c$$

ricavo y

$$\frac{1}{y-1} = 3\log(x^2+x+1) - 3\log 3$$

$$y - 1 = \frac{1}{3\log(x^2+x+1) - 3\log 3}$$

$$y = 1 + \frac{1}{3\log(x^2+x+1) - 3\log 3} =$$

$$= \boxed{1 + \frac{1}{3\log\left(\frac{x^2+x+1}{3}\right)}}$$

soluzione in forma esplicita.

Es: $\begin{cases} y' = -\dfrac{6x+3}{x^2+x+1}\boxed{(y-1)^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

si annulla a $y = 1$.

soluzione $y(x) = 1$ costante.

Es: $\begin{cases} y' = \operatorname{tg} x \cos^2 y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$y_0 = 1 \qquad \cos^2 1 \neq 0 \quad \Rightarrow$ divido per $\cos^2 y$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \operatorname{tg} x \, dx + c$$

separo le variabili.

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \operatorname{tg} y$$

$$\int tg\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x|$$

$$\Rightarrow \quad tg\,y = -\log|\cos x| + c$$

valore assoluto? $y(0)=1$ quindi

$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 0 = 1 > 0$ tolgo il

valore assoluto.

$$\Rightarrow \quad tg\,y = -\log(\cos x) + c$$

ricavo c usando $x=0$, $y=1$.

$$tg\,1 = -\log(\cos 0) + c$$

$$tg\,1 = -\log 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = tg\,1.$$

$$tg\,y = -\log(\cos x) + tg\,1 \quad c$$

$$\Rightarrow \quad y = \operatorname{arctg}\left(-\log(\cos x) + tg\,1\right) \quad \leftarrow \text{soluzione.}$$

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee. Cioè

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R} \text{ costanti}$$

Oss: Se y_1 e y_2 sono soluzioni e $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ anche y_1+y_2 e ky_1 sono ancora soluzioni. Infatti, sostituendo y_1+y_2 al posto di y nell'equazione

$$(y_1+y_2)'' + a(y_1+y_2)' + b(y_1+y_2) =$$

$$= \underbrace{y_1'' + ay_1' + by_1}_{0} + \underbrace{y_2'' + ay_2' + by_2}_{0} = 0 + 0$$

perché sia y_1 che y_2 sono soluzioni.

Come si risolvono?

Proviamo con una funzione del tipo

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

sostituisco nell'equazione

$$y'' + ay' + by = 0$$

ottengo

$$\underbrace{\lambda^2 e^{\lambda x}}_{y''} + a\underbrace{\lambda e^{\lambda x}}_{y'} + b\underbrace{e^{\lambda x}}_{y} = 0$$

divido per $e^{\lambda x}$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

quindi $y = e^{\lambda x}$ è soluzione se e solo se λ è radice del polinomio

Def: Il polinomio

$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ si dice

polinomio caratteristico dell'equazione.

Es: $y'' - y' - 6y = 0$

polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

radici

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

ho trovato 2 soluzioni

$y_1 = e^{3x}$ $y_2 = e^{-2x}$

si chiamano soluzioni fondamentali.

Oss: la funzione

$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ è soluzione

dell'equazione differenziale per ogni scelta di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Nel nostro caso la soluzione generale dell'equazione

$y'' - y' - 6y = 0$ è

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

Se il polinomio caratteristico ha 2 radici reali distinte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora la soluzione generale dell'equazione (si dice integrale generale) è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

quindi ci sono 2 costanti libere.

Cosa succede se il polinomio caratteristico ha 1 sola radice reale λ_0?

Prendo le 2 soluzioni

$$y_1(x) = e^{\lambda_0 x} \quad , \quad y_2(x) = x e^{\lambda_0 x}$$

$\Rightarrow$ l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 x e^{\lambda_0 x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se non ci sono radici reali?

Numeri complessi

$x^2+1=0$ non ha soluzioni $x \in \mathbb{R}$.

Definiamo un numero i t.c.

$$\boxed{i^2 = -1}$$

i risolve l'equazione $x^2+1=0$

$$i^2+1 = -1+1 = 0.$$

Un numero complesso è "generato" da una coppia di numeri reali.

Cioè, dati $a, b \in \mathbb{R}$ definisco

$$z = a + ib \quad \leftarrow \text{numero complesso.}$$

a si chiama parte reale di z e b parte immaginaria.

Si possono sommare e moltiplicare tra di loro.

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac + a\cdot id + ibc + i\cdot i\cdot db =$$

$$= ac + i(ad+bc) + \underbrace{i^2}_{-1} bd =$$

$$= ac + i(ad+bc) - bd = ac - bd + i(ad+bc)$$