Integrazione di funzioni razionali con denominatore di secondo grado.

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}\,dx$$

Caso 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^2}$ due radici coincidenti

sostituzione $x-a=t$ $\quad \frac{dx}{dt}=1 \quad dx=dt$

$$\int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\,dt = -1\cdot t^{-1} = -\frac{1}{t}+c = \frac{-1}{x-a}+c$$

Caso 2) due radici distinte

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} \qquad a\neq b.$$

provo a trovare due numeri A e B t.c.

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$$

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} = \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{Ax-Ab+Bx-Ba}{(x-a)(x-b)}$$

$$= \frac{(A+B)x-Ab-Ba}{(x-a)(x-b)}$$ deve essere $$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

i denominatori sono uguali allora devono essere uguali anche i numeratori, cioè

$(A+B)x - Ab - Ba = 1 \quad = 0 \cdot x + 1$

principio di identità dei polinomi

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-Ba=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{A=-B} \\ +Bb-Ba=1 \end{array}$$

sostituisco

$B(b-a)=1 \Rightarrow B=\frac{1}{b-a}$ ha senso perché $b \neq a$

$\Rightarrow A=-B=\frac{1}{a-b}$ sostituisco in

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} = \frac{\frac{1}{a-b}}{x-a}+\frac{\frac{1}{b-a}}{x-b} =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \int \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{a-b}\int \frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x-b}\right) =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\log|x-a|-\log|x-b|\right) = \frac{1}{a-b}\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + c$$

Es: $\int \frac{dx}{x^2-8x+15}$

$x^2-8x+15=0 \qquad x = 4 \pm \sqrt{16-15} = 4 \pm 1 = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2-8x+15 = (x-5)(x-3) \qquad \begin{matrix} a=5 \\ b=3 \end{matrix}$

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+15} = \frac{1}{a-b} \log\left|\frac{x-a}{x-b}\right| = \frac{1}{5-3} \log\left|\frac{x-5}{x-3}\right| =$$

$$= \frac{1}{2} \log\left|\frac{x-5}{x-3}\right| + c$$

se scambio a e b?

$a=3 \qquad b=5$

$$\frac{1}{a-b} \log\left|\frac{x-a}{x-b}\right| = \frac{1}{3-5} \log\left|\frac{x-3}{x-5}\right| = -\frac{1}{2} \log\left|\frac{x-3}{x-5}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\log\left|\frac{x-5}{x-3}\right|\right) = \frac{1}{2} \log\left|\frac{x-5}{x-3}\right|$$

Caso 3) nessuna radice reale.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

generalizziamo

$$\int \frac{dx}{k^2+x^2} \qquad k \in \mathbb{R},\ k \neq 0.$$

$k^2+x^2 \longrightarrow$ non ha radici reali.

$$\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \int \frac{dx}{k^2\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{1}{k^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{k}\right)^2}$$

cambio variabile $\frac{x}{k}=t \quad x=kt \quad \frac{dx}{dt}=k$

$dx = k\,dt$

$$= \frac{1}{k^{\cancel{2}}}\int \frac{\cancel{k}\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{k}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{k}\,\mathrm{arctg}\, t + c =$$

$$= \frac{1}{k}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{k}\right) + c$$

caso generale

x^2+px+q senza radici reali.

$$x^2+px+q = x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q =$$

$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}+q$$

osserviamo che $-\frac{p^2}{4}+q>0$ perché

$\Rightarrow$ pongo $-\frac{p^2}{4}+q = k^2$ quindi

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2}$$

sostituzione $x+\frac{p}{2}=t \quad \frac{dx}{dt}=1 \quad dx=dt$

$$= \int \frac{dt}{t^2+k^2}$$ che è del tipo precedente.

Es: $$\int \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)-1+10} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2+9}$$ $x+1=t \quad dx=dt$

$$= \int \frac{dt}{t^2+9} =$$ $k^2=9 \Rightarrow k=3$

$t=x+1$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right)+c = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right)+c$$

Numeratore di primo grado.

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}\,dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\int \frac{2x+c-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}\,dx =$$

il numeratore è la derivata del denominatore.

$$= \frac{a}{2}\int \boxed{\frac{2x+c}{x^2+cx+d}}\,dx + \frac{a}{2}\int \frac{-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\log|x^2+cx+d| + \boxed{\frac{a}{2}\int \frac{-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}\,dx}$$

è di uno dei tipi precedenti.

Es: $\int \frac{4x+5}{x^2+2x-1}\,dx = 2\int \frac{2x+\frac{5}{2}}{x^2+2x-1}\,dx =$

$$= 2\int \frac{2x+2-2+\frac{5}{2}}{x^2+2x-1}\,dx = 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x-1}\,dx +$$

$$+ 2\int \frac{+\frac{1}{2}}{x^2+2x-1}\,dx = 2\log|x^2+2x-1| + \int \frac{dx}{x^2+2x-1}$$

è del tipo precedente.

Numeratore è di grado ≥ 2.

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx \qquad \text{grado}(N)\geq 2 \quad \text{grado}(D)=2.$$

$$\boxed{N(x) = Q(x)\cdot D(x) + R(x)} \quad \text{con grado}(R) < 2.$$

divisione fra polinomi.

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int \frac{Q(x)D(x)+R(x)}{D(x)}\,dx =$$

grado $R = \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$

$$= \boxed{\int Q(x)\,dx} + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

integrale di un polinomio

Es: $\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\,dx$

divisione fra polinomi

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -3x^4 & & & +x & +3 & x^2-1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & & +x^3 & & & & x^3-3x^2+x-3 \quad Q(x) \\ \cline{1-6}
/ & -3x^4 & +x^3 & & +x & +3 & \\
 & +3x^4 & & -3x^2 & & & \\ \cline{2-6}
 & / & x^3 & -3x^2 & +x & +3 & \\
 & & -x^3 & & +x & & \\ \cline{3-6}
 & & / & -3x^2 & +2x & +3 & \\
 & & & 3x^2 & & -3 & \\ \cline{4-6}
 & & & / & 2x & & R(x)
\end{array}
$$

$$x^5-3x^4+x+3=(x^3-3x^2+x-3)(x^2-1)+2x$$

$$\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\,dx=\int \frac{(x^3-3x^2+x-3)(x^2-1)+2x}{x^2-1}\,dx=$$

$$=\int x^3-3x^2+x-3\,dx+\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}-3x+\log|x^2-1|+c$$

Equazioni differenziali ordinarie

sono equazioni dove l'incognita è una funzione.

Sia $y = y(x)$ ~~una~~ funzione derivabile n-volte.
Sia F una funzione di $n+2$ variabili.
un'equazione del tipo

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

si dice equazione differenziale ordinaria di ordine n.

n è l'ordine della derivata più alta che compare nell'equazione.

Es: $\sin(y') + y^4 + \log x = 0$

è un'equazione diff. di ordine 1.
la derivata più alta è y'.

$\log(y'') + e^{y'} + (\operatorname{tg} x) \cdot y = 0$

è di ordine 2 derivata seconda.

Es: $y' = x^2$ eq. diff. di ordine 1.
l'incognita è $y(x)$. Trovare una funzione $y(x)$ t.c. $y' = x^2$.

soluzione: $y(x) = \frac{x^3}{3} + c$ infinite soluzioni.

$\underline{Es}$: $y' = y$ eq. diff. di ordine 1.

cerco una funzione che sia uguale alla sua derivata.

$y = e^x$, $y = 0$ sono soluzioni.

$y = e^x + c$? non è soluzione.

verifica $y' = e^x$, $y = e^x + c$ se $c \neq 0$

$\Rightarrow y' \neq y$.

$\boxed{y = k \cdot e^x}$ $\Rightarrow y' = k \cdot e^x \Rightarrow y' = y$.

è soluzione $\forall k \in \mathbb{R}$.

$\underline{Es}$: $y'' = y$

$y = ke^x$ è soluzione. $y' = ke^x$, $y'' = ke^x$

ce ne sono altre?

$\boxed{y = h \cdot e^{-x}}$ $\Rightarrow y' = h(-e^{-x}) = h(-(-(e^{-x})) = he^{-x}$

$$\overset{\shortparallel}{y}.$$

sono soluzioni

$y = ke^x + he^{-x}$ $y' = ke^x - he^{-x}$

$y'' = \boxed{ke^x + he^{-x}} = y$ è soluzione

famiglia a 2 parametri di soluzioni.

Es: $y'' = -y$ $\quad y = \sin x$ è soluzione

$\quad y = \cos x$ è soluzione

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ è soluzione $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

due parametri da scegliere liberamente.

Quando devo fissare i parametri?

Aggiungendo condizioni.

Problema di Cauchy

considero un'equazione differenziale di ordine n e aggiungo n condizioni.

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

è sempre lo stesso punto x_0.

x_0 è un punto fissato (punto iniziale)

e $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ sono valori fissati (valori iniziali).

L'equazione differenziale in generale ha una soluzione con n parametri liberi, le n-condizioni iniziali servono a fissare i parametri.

Es: $\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

uso queste per trovare c_1 e c_2.

$\boxed{y(0)=0}$. Calcolo $y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \cdot \sin 0 =$

$= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1$

$\Rightarrow$ $c_1 = 0$ $\Rightarrow$ ho fissato c_1

Uso $\boxed{y'(0)=1}$. Per usarla devo trovare $y'(x)$ derivando $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$\Rightarrow y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$

$\Rightarrow y'(0) = -c_1 \cdot \sin 0 + c_2 \cos 0 = -c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = c_2$

$c_2 = 1$

La soluzione generale era

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

la soluzione con le condizioni iniziali è quella con $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$ cioè

$$\boxed{y(x) = \sin x}$$

La soluzione del Problema di Cauchy è

$$y(x) = \sin x.$$

L'equazione differenziale da sola ha infinite soluzioni, il problema di Cauchy ne ha 1 sola.

Equaz. diff. lineari del primo ordine

Sono le equazioni del tipo

$$y' = a(x)\, y + b(x)$$

con a e b funzioni continue.

Es: $y' = y \sin x + \cos x$ $\qquad$ $a(x) = \sin x$
$b(x) = \cos x$

Es: $y' = \log x \cdot y^{2} + e^{x}$

non è lineare perché y è elevato al quadrato

Se $b(x)=0$ l'equazione si dice <u>omogenea</u>

Oss: Consideriamo un'equazione omogenea

$$y' = a(x) y .$$

Se ho 2 soluzioni y_1 e y_2 allora

$y_1 + y_2$ è ancora soluzione infatti:

$$(y_1+y_2)' = y_1' + y_2' = ay_1 + ay_2 = a(y_1+y_2)$$

inoltre se $k \in \mathbb{R} \Rightarrow ky_1$ è ancora soluzione, infatti

$$(ky)' = ky' = kay = a(ky)$$ è soluzione.

Soluzione generale dell'equazione completa

$$y' = a(x) y + b(x) .$$

Consideriamo una primitiva di $a(x)$

cioè $A(x)$ t.c. $A' = a$.

moltiplichiamo l'equazione per $e^{-A(x)}$

$$y' e^{-A(x)} = a(x) y e^{-A(x)} + b(x) e^{-A(x)}$$

$$\boxed{y' e^{-A(x)} - a(x) y e^{-A(x)}} = b(x) e^{-A(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{-A(x)}\right) = y' e^{-A(x)} + y\left(-A' e^{-A(x)}\right) =$$

$$= y' e^{-A(x)} - a y e^{-A(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{-A(x)}\right) = b(x) e^{-A(x)}$$

integro da tutte e due le parti

$$y e^{-A(x)} = \int b(x) e^{-A(x)} dx + c$$

moltiplico per $e^{A(x)}$

$$\boxed{y = e^{A(x)} \left(\int b(x) e^{-A(x)} dx + c \right)}$$

sono tutte e sole le soluzioni dell'equaz.

$y' = ay + b$ $\forall c$ costante arbitraria.