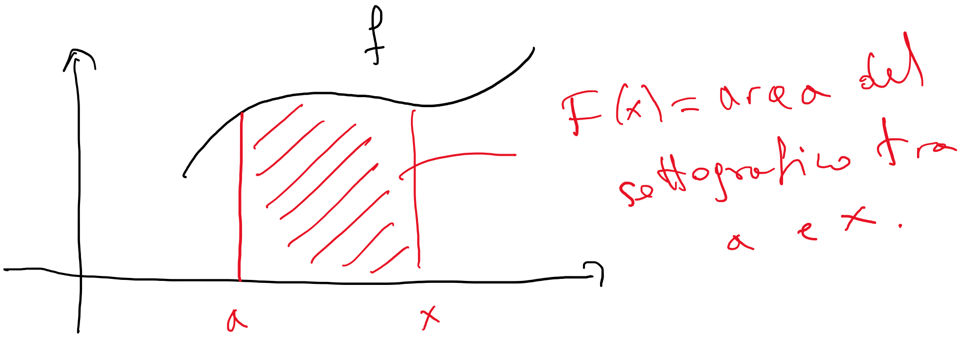
Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $a \in I$ punto qualsiasi
$f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è una primitiva di f.



$$F'(x) = f(x).$$

dim: devo vedere che F è derivabile e che $F' = f$.
Fisso $x_0 \in I$ arbitrario e calcolo il rapporto incrementale di F in x_0.

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

media integrale di f sull'intervallo di estremi x_0 e x

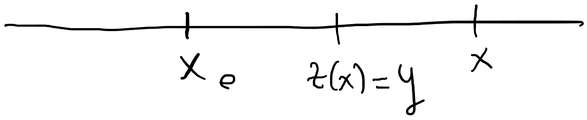
f è continua quindi per il teorema della media integrale esiste $z(x)$ compreso tra x_0 e x t.c.

$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(z(x))$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(z(x))$$

cambio variabile e scrivo $y = z(x)$

a quanto tende y se $x \to x_0$?



per il teorema dei Carabinieri $\lim_{x\to x_0} y = x_0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(z(x)) = \lim_{y\to x_0} f(y) = f(x_0)$$

perché f è continua.

Quindi

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0).$$

F è una primitiva di f.

Teorema di Torricelli

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$a \in I$ fissato. Se G è una primitiva di f allora $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k$$

e $\forall\, \alpha, \beta \in I$ risulta

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Notazione: $\left[G(x)\right]_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha).$

Es: $\displaystyle\int_1^3 x\,dx$ una primitiva di $f(x) = x$ è $G(x) = \dfrac{x^2}{2}$

$$\Rightarrow \int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$

se avessi scelto come primitiva $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 7$

$$\left[\frac{x^2}{2} + 7\right]_1^3 = \frac{9}{2} + \cancel{7} - \left(\frac{1}{2} + \cancel{7}\right) = 4.$$

Integrali con estremi variabili

Teorema: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo $f : I \to \mathbb{R}$ continua $A \subset \mathbb{R}$, $\alpha : A \to I$, $\beta : A \to I$ derivabili.

Definiamo

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt$$

Allora G è derivabile e

$$\underline{G'(x) = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x).}$$

Caso particolare $\beta(x) = x$ $\alpha(x) = a$ costante

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

$$G'(x) = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x) =$$

$$= f(x)\cdot 1 - f(a)\cdot 0 = f(x)$$

quindi otteniamo il teorema fondamentale.

Es: $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\sin x} e^t \operatorname{arctg} t\, dt$ | $f(t) = e^t \operatorname{arctg} t$

$\beta(x) = \sin x$

$\alpha(x) = x^2$

calcolare $G'(x)$.

$$G'(x) = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x) =$$

$$= e^{\sin x} \operatorname{arctg}(\sin x)\cdot \cos x - e^{x^2} \operatorname{arctg}(x^2)\cdot 2x$$

Es: $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^t \operatorname{arctg} t\, dt}{\sin(x^4)} = \frac{\int_0^0 e^t \operatorname{arctg} t\, dt}{0} = \frac{0}{0}$$

de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{1}{\boxed{e^{x^2}}}\,\mathrm{arctg}(x^2)\cdot \overset{\beta'}{2x} - e^0\,\mathrm{arctg}\,0 \cdot \overset{\alpha'}{0}}{\underset{1}{\boxed{\cos(x^4)}}\; 4x^3} =$$

$\mathrm{arctg}\, t = t + o(t)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}(x^2)\, x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 + o(x^2))\,\cancel{x}}{2x^{\cancel{3}\,2}} = \frac{1}{2}$$

Integrazione per parti

$f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, f continua g di classe C^1. Se F è una primitiva di f allora

$$\int f g \, dx = F g - \int F g' \, dx .$$

(g si dice di classe C^1 se g è derivabile e g' è continua).

dim: $(Fg)' = \overset{f}{F'} g + F g' = f g + F g'$

integro l'equazione

$$\int (Fg)' \, dx = \int f g \, dx + \int F g' \, dx$$

$$F g = \int f g \, dx + \int F g' \, dx$$

$$\int f g \, dx = Fg - \int F g' \, dx$$

$F = -\cos x \qquad g' = 1$

Es: $\displaystyle\int \underbrace{x}_{g} \underbrace{\sin x}_{f} \, dx = Fg - \int F g' \, dx =$

$\displaystyle = -\cos x \cdot x - \int -\cos x \cdot 1 \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx$

$= -x\cos x + \sin x + c$

$F = x$

$g' = \dfrac{1}{x}$

Es: $\displaystyle\int \log x \, dx = \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{\log x}_{g} \, dx$

$\displaystyle = Fg - \int F g' \, dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x\log x - \int 1 \, dx$

$= x\log x - x + c$

$F = \sin x$

$g' = -\sin x$

Es: $\boxed{\displaystyle\int \cos^2 x \, dx} = \displaystyle\int \underbrace{\cos x}_{f} \, \underbrace{\cos x}_{g} \, dx$

$\displaystyle = Fg - \int F g' \, dx = \sin x \cos x - \int \sin x (-\sin x) \, dx =$

$\displaystyle = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int 1 - \cos^2 x \, dx$

$\displaystyle = \sin x \cos x + \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx = \boxed{\sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx}$

$$\boxed{\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx}$$

$$2\int \cos^2 x\, dx = \sin x \cos x + x$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + c$$

Oss: $D(\log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ $\quad f(x)>0$.

quindi $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log(f(x)) + c$

Es: $\int \operatorname{arctg} x\, dx = \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{g}\, dx$

$$\boxed{\begin{aligned} F &= x \\ g' &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}}$$

$$= Fg - \int F g'\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

Integrazione per sostituzione

I, J intervalli di $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ continua

$\varphi: J \to I$ di classe C^1. Se F è una primitiva di f allora

$$\int (f\circ\varphi)\,\varphi'\, dx = (F\circ\varphi) + c$$

notate che $F \circ \varphi = \int f(t)\,dt$ con $t = \varphi(x)$.

dim: $(F\circ\varphi)' = (F'(\varphi))\varphi' = (f\circ\varphi)\varphi'$.

integrando

$$F\circ\varphi = \int (F\circ\varphi)'\,dx = \int (f\circ\varphi)\,\varphi'\,dx.$$

Es: $\int x\, e^{x^2}\,dx$ poniamo $\varphi(x) = x^2$

$\varphi'(x) = 2x \Rightarrow x = \frac{\varphi'(x)}{2}$

$$= \int \frac{\varphi'(x)}{2} \cdot e^{\varphi(x)}\,dx =$$

poniamo $f(t) = \frac{e^t}{2}$

$\Downarrow$

$F(t) = \frac{e^t}{2}$

$$= \int \varphi'(x)\, f(\varphi(x))\,dx =$$

$$= F\circ\varphi = \frac{e^{\varphi(x)}}{2} = \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

$$\Rightarrow \int x\, e^{x^2}\,dx = \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

Metodo pratico.

$$\int x\, e^{x^2}\,dx =$$

pongo $x^2 = t \Rightarrow t = t(x)$
dipende da x

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dt = 2x\,dx \qquad \frac{dt}{2} = x\,dx$$

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t\, dt = \frac{1}{2} e^t + c$$

$t = x^2$

$\frac{dt}{2}$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

Es: $\int \frac{tg\, x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx$

$\cos x = t$

$\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$-dt = \sin x\, dx$

$$= \int \frac{-dt}{t^3} = -\int t^{-3}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{-2} t^{-2} + c = \frac{1}{2t^2} + c = \frac{1}{2\cos^2 x} + c$$

Es: $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

$x = \sin t$

$\frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t\, dt$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\, \cos t\, dt =$$

$$= \int |\cos t| \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt =$$

↳ supponiamo $\cos t \geq 0$

$$= \frac{t + \sin t \cos t}{2} + c = \circledast$$

lo devo esprimere in funzione di x

$x = \sin t \Rightarrow t = \arcsin x$

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

$$(*) = \frac{\arcsin x + x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2} + c$$

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

$$D(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow D(\arcsin x + \arccos x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$\Rightarrow$ $\arcsin x + \arccos x$ è costante. Quanto vale la costante? La calcolo per $x=0$

$$\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c = \frac{\pi}{2} - \arccos x + c =$$

$$= -\arccos x + d \qquad d = \frac{\pi}{2} + c$$