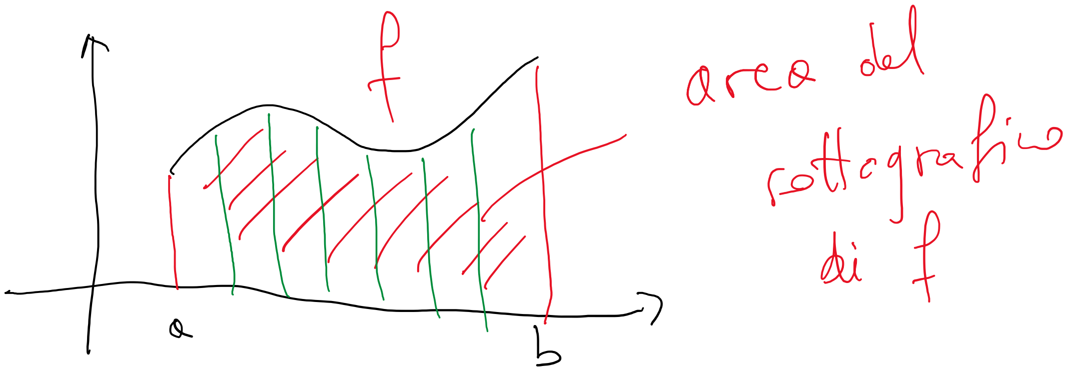
Integrale di Riemann



$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f limitata

Def: un insieme di punti

$$A = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{con}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

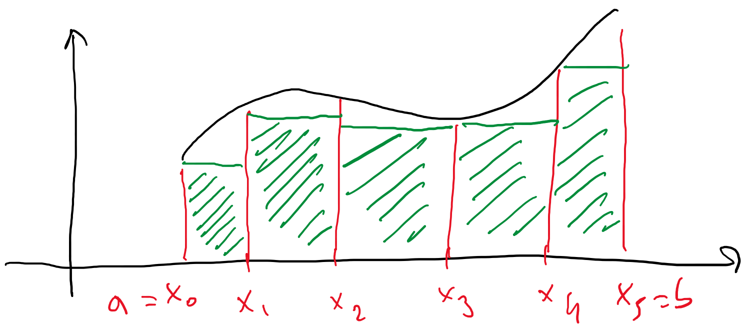
si dice suddivisione di $[a,b]$.

Oss: gli intervalli non sono necessariamente della stessa grandezza.

Oss: $$\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = b-a$$

Def: $$S'(f,A) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \, (x_j - x_{j-1})$$

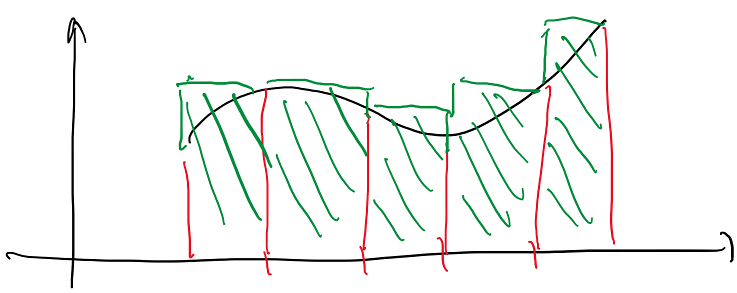
si dice somma inferiore di f relativa alla suddivisione A.



$S'(f, A)$ è la somma delle aree dei rettangoli.
È un'approssimazione per difetto dell'area del sottografico.

Def: $S''(f, A) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \, (x_j - x_{j-1})$

si dice somma superiore di f relativa ad A.



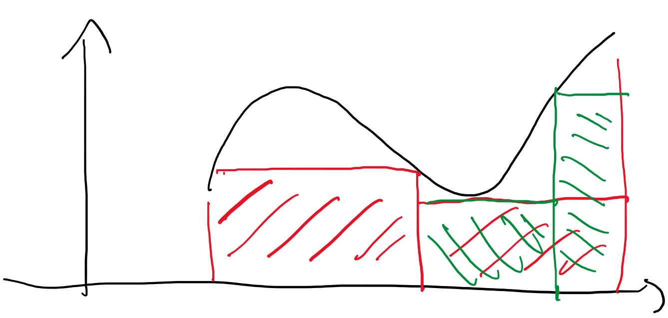
è un'approssimazione per eccesso.

Oss: ho usato il fatto che f è limitata.
non mi serve la continuità.

Def: $S'(f) = \sup \{ S'(f, A) : A \text{ suddivisione} \}$

$S''(f) = \inf \{ S''(f, A) : A \text{ suddivisione} \}$.

$S'(f)$ si dice somma inferiore per f
$S''(f)$ somma superiore per f.



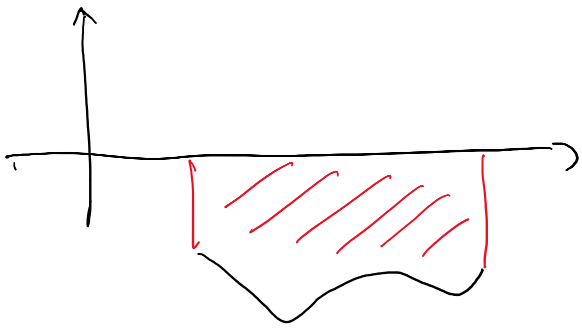
aggiungo 1 punto

Def: Se $S'(f) = S''(f)$ allora f si dice integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ e il valore comune di $S'(f)$ e $S''(f)$ si dice integrale di f su $[a,b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x)\, dx .$$

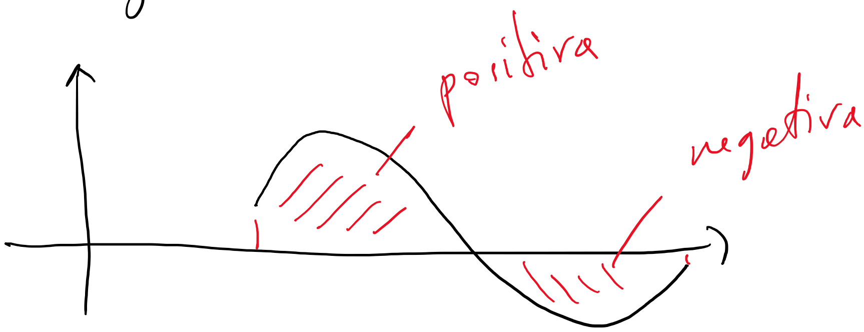
Quindi
$$\int_a^b f(x)\, dx = S'(f) = S''(f).$$

Oss: Non è detto che f sia ≥ 0.



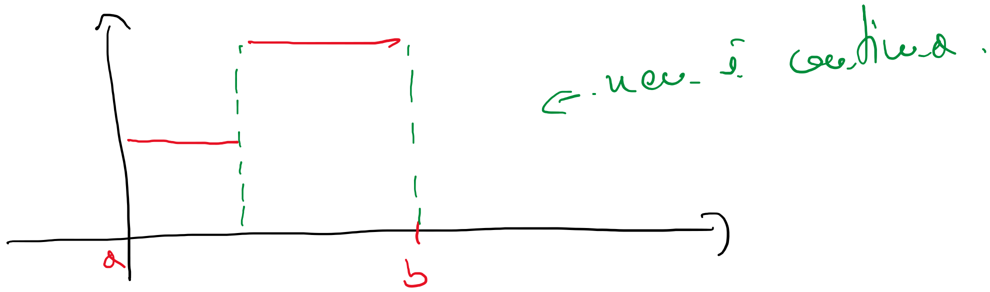
Se $f \leq 0 \implies \int_a^b f(x)\, dx \leq 0$.

Quindi l'integrale è "l'area" del sottografico con il segno.

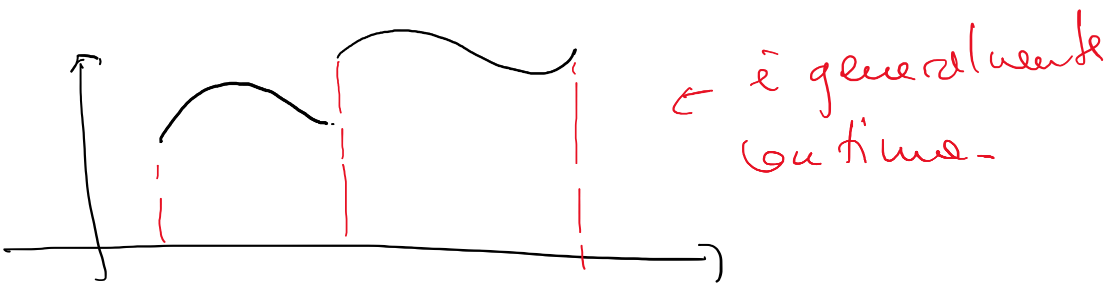


Teorema: Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua allora f è integrabile.

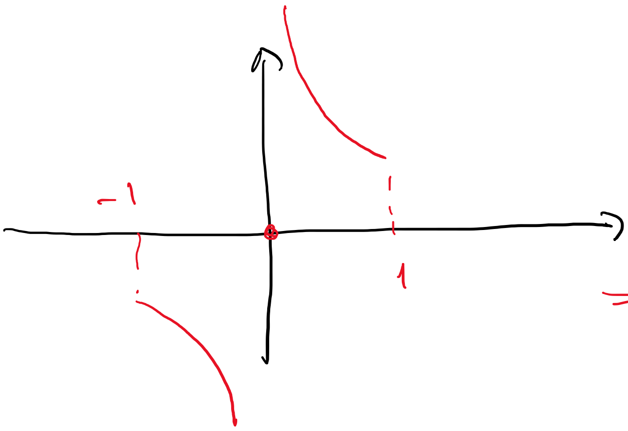
Ci sono altre funzioni integrabili.



Def: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice generalmente continua se è limitata e ha al massimo un numero finito di punti di discontinuità.



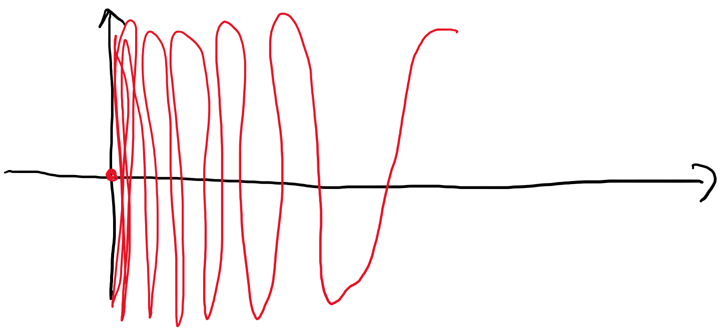
Es: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad f: [-1,1] \to \mathbb{R}$



ha 1 solo punto di discontinuità ma non è limitata.
$\Rightarrow$ non è generalmente continua.

Teorema: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è generalmente continua allora f è integrabile.

Es: $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad f: [0,1] \to \mathbb{R}$

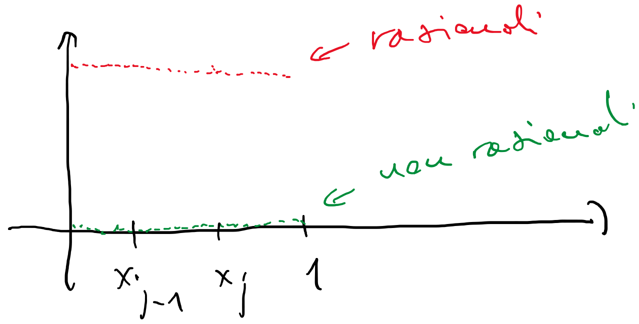


è generalmente continua quindi integrabile.

Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

funzione di Dirichlet.

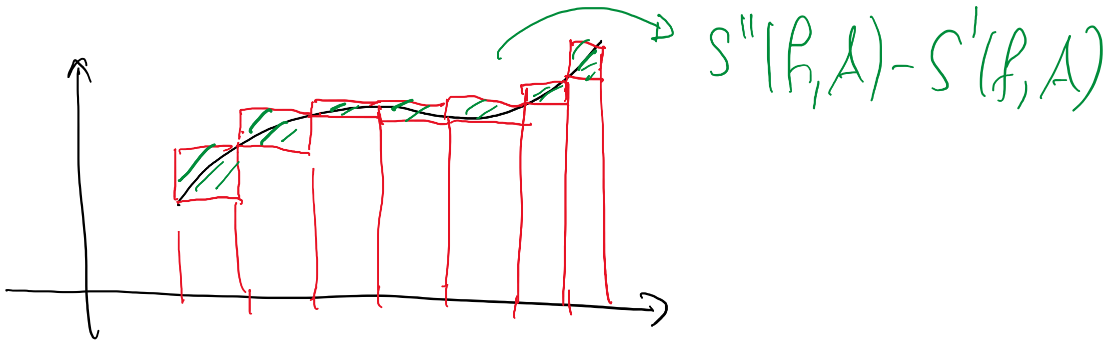


se prendo un qualsiasi intervallo $[x_{j-1}, x_j]$

$$\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) = 1 \qquad \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ $S'(f) = 0$ $\qquad S''(f) = 1.$

$\Rightarrow$ $S'(f) \neq S''(f) \Rightarrow f$ non è integrabile.



se f è integrabile $\Rightarrow$ $S''(f,A) - S'(f,A)$ "tende" a $\emptyset$.

è come dire che il grafico di f ha misura nulla.

<u>Teorema</u>: Siano f, g integrabili su $[a,b]$ e sia $k \in \mathbb{R}$. Allora $f+g$, kf e $|f|$ sono integrabili e valgono:

1) $$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2) $$\int_a^b (kf)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

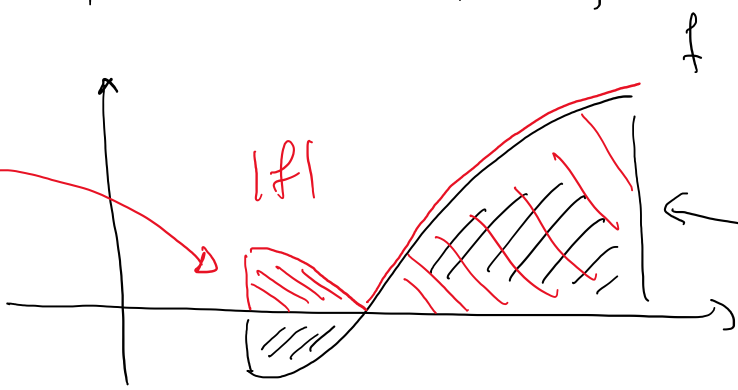
3) Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ allora
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

4) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

5) Se $a<c<b$ allora
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

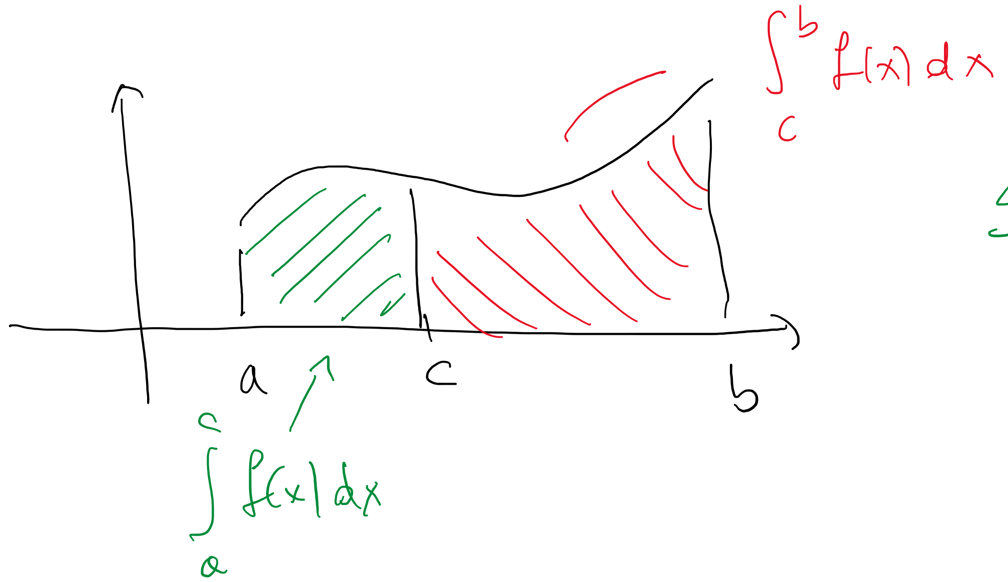
3)

$\int_a^b |f|\,dx$



$\int_a^b f\,dx$

4)

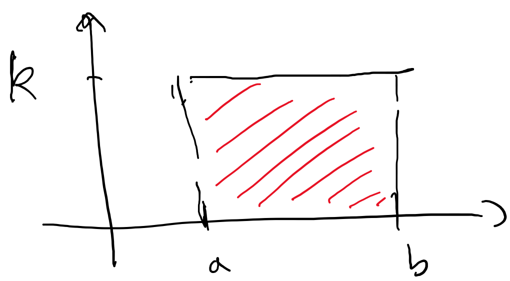


5)

Oss: Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è costante

cioè $f(x)=k \quad \forall\, x\in[a,b]$

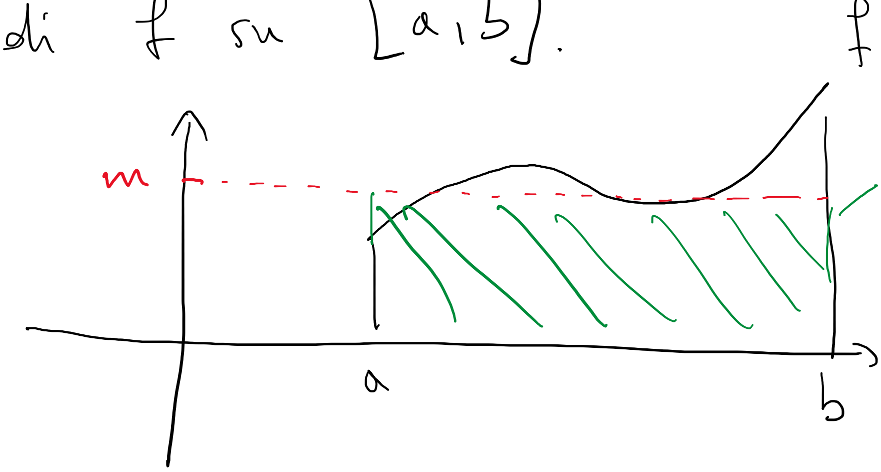
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = k(b-a)$$



Def: Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è integrabile, la quantità

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ si dice media integrale

di f su $[a,b]$.



il rettangolo ha la stessa area del sottoprofilo.

rappresenta l'altezza di un rettangolo di base $b-a$ che ha lo stessa area del sottografico di f.

Teorema della media integrale

Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile. Allora

$$\inf_{[a,b]}(f) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]}(f).$$

Se f è anche continua allora $\exists\, z \in [a,b]$ t.c.

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

dim: $\forall\, x \in [a,b]$ risulta che

$$\inf_{[a,b]}(\ \ ) \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]}(f)$$

integro la disuguaglianza e uso la p ietà 3)

$$\int_a^b \inf_{[a,b]}(f)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \sup_{[a,b]}(f)\,dx$$

sono costanti

$$\Rightarrow \inf_{[a,b]}(f)\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]}(f)\,(b-a)$$

divido per $b-a$

$$\inf_{[a,b]}(f) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \sup_{[a,b]}(f).$$

Se f è continua allora $\inf(f) = \min(f)$

$\sup(f) = \max(f)$ (Weierstrass)

e f assume tutti i valori intermedi

compreso quindi la media integrale

che è un valore intermedio

cioè $\exists\ z \in [a,b]:\ f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Def: Se $b<a$ definisco

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

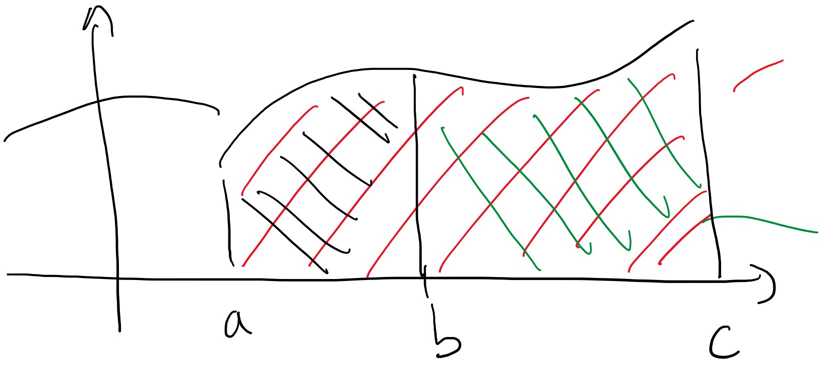
e anche $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Es: $\displaystyle\int_5^3 x^2\,dx = -\int_3^5 x^2\,dx$

Domanda: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

vale ancora se $a < b < c$?

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$



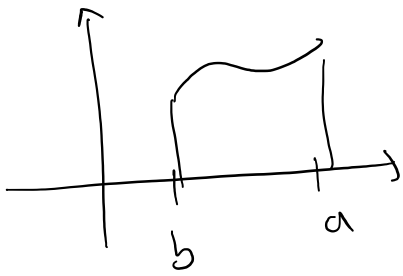
$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$

$\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$

vale ancora perché $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx = -\int_b^c f(x)\,dx$

La media integrale ha senso anche con gli estremi scambiati? $\boxed{\text{Sì}}$

Se $b < a$



$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx$$

Def: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$.

Una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ si dice <u>primitiva</u> di f se F è derivabile e

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Es: $f(x) = 2x \qquad F(x) = x^2$

F è una primitiva di f.

Non è unica: $G(x) = x^2 + k \quad k \in \mathbb{R}$ costante

$\Rightarrow G'(x) = 2x = f$ è un'altra primitiva.

quindi se esiste una primitiva ne esistono infinite.

Oss: Due primitive di f differiscono sempre per una costante additiva.

dim: Se F e G sono primitive di f allora $F' = f$, $G' = f$

$\Rightarrow (F-G)' = F' - G' = f - f = 0$

F e G sono definite su un intervallo allora $F-G$ è costante.

cioè $F = G + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Def: L'insieme di tutte le primitive di f si dice integrale indefinito di f

e si indica con $\int f(x)\,dx$

senza gli estremi di integrazione.
Non è una funzione singola ma un insieme di funzioni

$$\int f(x)\,dx = \{ F : F' = f \}$$

Es: $\int 2x\,dx = \{ x^2 + k : k \in \mathbb{R} \}$

si abbrevia in genere in questo modo

$$\int 2x\,dx = x^2 + k .$$

L'integrale di Riemann invece rappresenta un'area e si dice integrale definito

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

— con gli estremi di integrazione.

Es: $\int e^x\,dx = e^x + k$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + k$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + k$$

infatti se $x>0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \lg x = \frac{1}{x}$

se $x<0 \rightarrow \frac{d}{dx} \log|x| = \frac{d}{dx} \log(-x) = (-1) \cdot \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \quad \text{se } n \neq -1. \quad n \in \mathbb{N}$$

Es: $\int x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4 + k$

in generale $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$.