Teorema: Sia $n_0 \in \mathbb{N}$, $f: [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ poniamo $a_n = f(n)$.

Se esiste $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ allora $\exists \lim_{n \to \infty} a_n = l$.

Es: $\lim_{n \to \infty} e^n$

calcolo $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} e^n = +\infty$.

Es: $\lim_{n \to \infty} n \sin \frac{1}{n}$

considero la funzione $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1.$$

In alternativa potete fare direttamente la sostituzione in $\sin \frac{1}{n}$. Cioè

$\sin t = t + o(t^2)$ se $t \to 0$

sostituisco $t = \frac{1}{n}$ se $n \to +\infty \Rightarrow t \to 0$

$$\Rightarrow \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$n \sin \frac{1}{n} = n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \to 1.$$

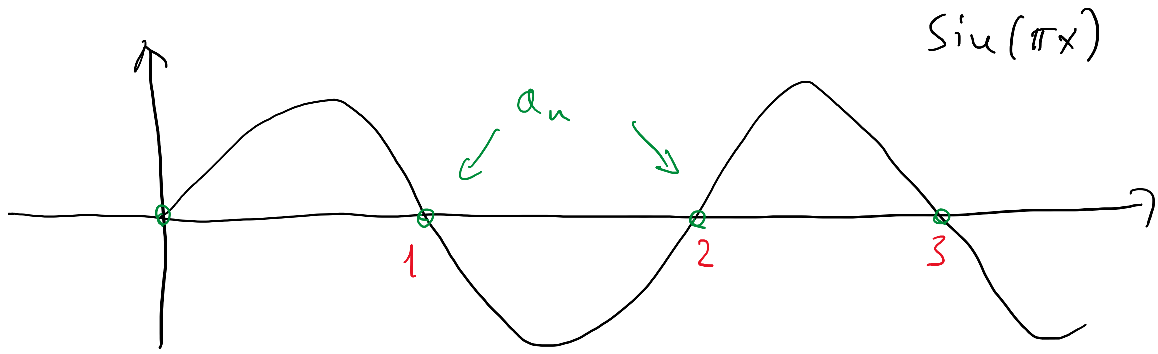
Oss: Il viceversa del teorema in generale è falso, cioè potrebbe esistere il limite $\lim_{n\to\infty} f(n)$ ma non esistere $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Es: $f(x) = \sin(\pi x)$

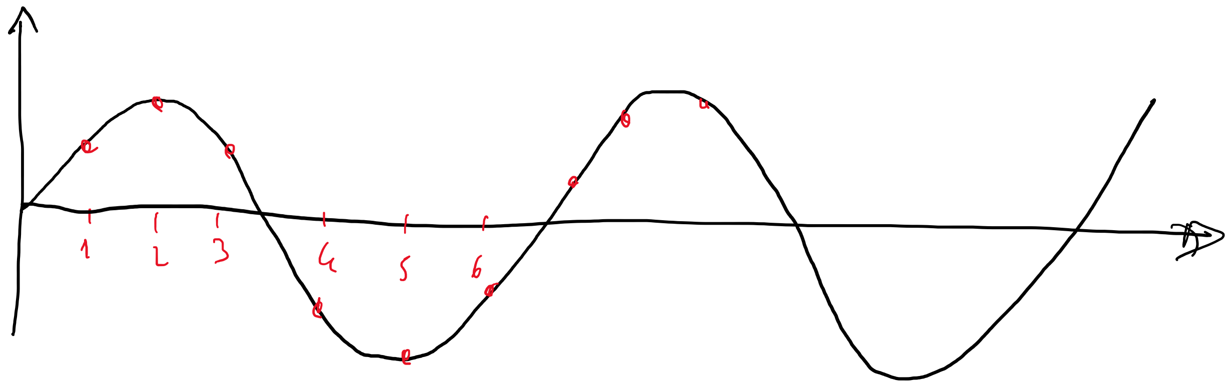
$a_n = f(n) = \sin(\pi n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

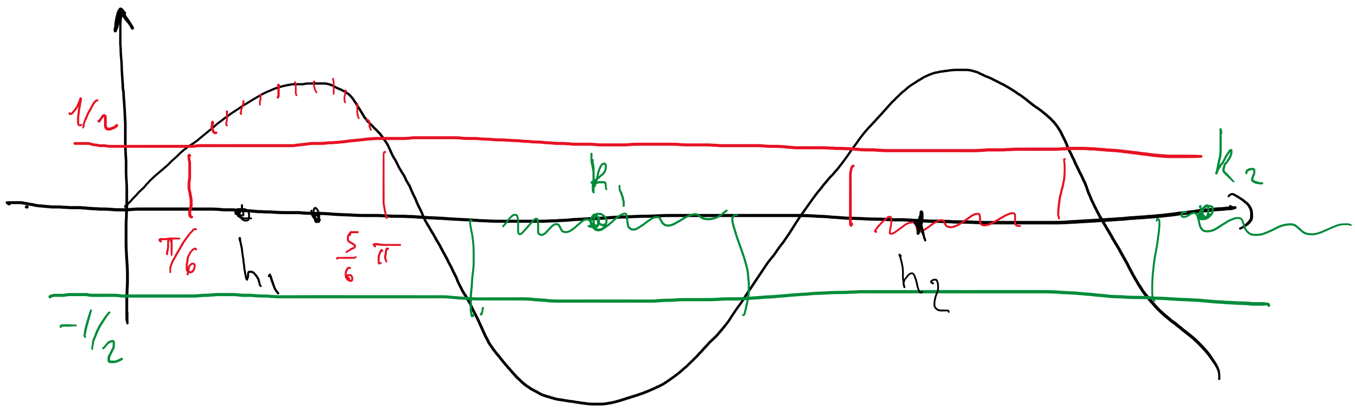
ma $\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin(\pi x)$.



Es: $\exists \lim_{n\to\infty} \sin n$???



dimostriamo che non esiste $\lim_{n\to\infty} \sin n$.



risolviamo la disequazione $\sin x \geq \frac{1}{2}$

con $x \in [0, 2\pi]$. cioè $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$

quanto è grande l'intervallo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$?

$$\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi > 2$$

quindi l'intervallo contiene almeno 2 numeri interi.

$\Rightarrow$ $\sin n$ calcolato in questi numeri interi vale $\geq \frac{1}{2}$.

Di intervalli ce ne sono infiniti allora posso costruire una successione di numeri interi crescente h_n t.c.

$$\sin(h_n) \geq \frac{1}{2} \quad \forall n.$$

$\Rightarrow$ ho ottenuto una sottosuccessione estratta $\sin(h_n)$ t.c. $\sin(h_n) \geq \frac{1}{2}$ $\forall n$.

Allo stesso modo posso costruire una sottossuccessione estratta t.c.

$$\sin(k_n) \leq -\frac{1}{2}.$$

Se esistesse il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n) = l$$

allora dovrebbe essere

$$\lim_{n\to\infty} \sin(h_n) = l \geq \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin(k_n) = l \leq -\frac{1}{2} \quad \text{assurdo.}$$

quindi $\nexists \lim_{n\to\infty} \sin n$.

Es: $a_n = n^2 e^{-\frac{1}{n}} \sin n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ?$$

$$n^2 \to +\infty \qquad e^{-\frac{1}{n}} \to e^0 = 1$$

$\nexists \lim_{n\to\infty} \sin n$. Quindi?

Osservo che $\exists\, h_n$ t.c. $\sin(h_n) \geq \frac{1}{2}$

e $\exists\, k_n$: $\sin(k_n) \leq -\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow h_n^2 e^{-1/h_n} \sin(h_n) \geq h_n^2 e^{-\frac{1}{h_n}} \frac{1}{2} \to +\infty$$

$$\Rightarrow k_n^2 e^{-\frac{1}{k_n}} \sin(k_n) \leq k_n^2 e^{-\frac{1}{k_n}} \left(-\frac{1}{2}\right) \to -\infty.$$

$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} a_n$ perché ho trovato due sottosuccessioni che tendono a limiti diversi.

<u>Teorema</u>: Sia $\{a_n\}$ una successione e $\{a_{h_n}\}$ e $\{a_{k_n}\}$ due sottosuccessioni t.c.

$\{h_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{k_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$

(si dice che saturano tutti gli indici).

Se $\exists \lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to\infty} a_{h_n} = \ell$, allora

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Caso tipico: pari e dispari.

<u>Es</u>: $a_n = \dfrac{[\log(n+1)]^{(-1)^n}}{n^3}$, $n \geq 1$.

indici pari $h_n = 2n$ $\qquad (-1)^{2n} \to 1$

$$a_{2n} = \frac{[\log(2n+1)]^{(-1)^{2n}}}{(2n)^3} = \frac{\log(2n+1)}{8n^3} \to 0$$

indici dispari $k_n = 2n+1$

$$a_{2n+1} = \frac{[\log(2n+1+1)]^{(-1)^{2n+1}}}{(2n+1)^3} =$$

$$= \frac{[\log(2n+2)]^{-1}}{(2n+1)^3} = \frac{1}{\log(2n+2)\,(2n+1)^3} \to 0$$

i pari e i dispari saturano tutto $\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Criterio del rapporto.

Se $a_n > 0$ definitivamente e esiste

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ allora

1) se $0 \le l < 1$ risulta $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) Se $l > 1$ risulta $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Oss: Se $l = 1$ il criterio non si applica.

Es: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ usiamo il criterio del rapporto $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Es: $a_n = 2^n$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty .$$

Es: $\lim_{n\to\infty} n!$

uso il criterio del rapporto con $a_n = n!$

$\Rightarrow a_{n+1} = (n+1)!$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1 \to +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty .$$

Non serviva il criterio del rapporto perché

$$n! \geq n \to +\infty$$

Velocità di $n!$

confronto con le potenze.

$k \in \mathbb{N}$ fissato.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^k} = \frac{\infty}{\infty}$$

uso il rapporto con $a_n = \frac{n!}{n^k}$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^k} .$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^k} \cdot \frac{n^k}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^k}{(n+1)^k} =$$

$$= (n+1) \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \longrightarrow (+\infty) \cdot 1^k = +\infty .$$

<u>confronto con l'esponenziale.</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{b^n} \quad \text{con} \quad b > 1$$

$$a_n = \frac{n!}{b^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{b^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{b^{n+1}} \cdot \frac{b^n}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{b^n}{b^{n+1}} =$$

$$= (n+1) \cdot \frac{1}{b} \to (+\infty) \cdot \frac{1}{b} = +\infty .$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{b^n} = +\infty}$$

<u>Es</u>: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

stessa base

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{1+o(1)} = e.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

cioè $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$

Criterio della radice

Se $a_n \geq 0$ definitivamente

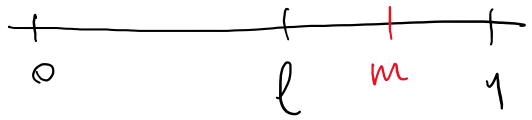
se $\exists \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ allora

1) Se $0 \le \ell < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) Se $\ell > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Oss: Se $\ell = 1$ il criterio non si applica.

dim: 1) $0 \le \ell < 1$.



posso trovare $m \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell < m < 1$.

Uso la definizione di limite su $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$

con $\varepsilon = m - \ell > 0$.

Cioè $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. se $n \ge \bar{n}$

$\Rightarrow \quad \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$.

se scelgo $\varepsilon = m - \ell$ ottengo che

$$\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon = \ell + m - \ell = m$$

$\Rightarrow$ elevo alla n e ottengo

$$a_n < m^n \qquad \text{ma } a_n \ge 0$$

$\Rightarrow \quad 0 \le a_n < m^n \qquad$ ma $0 < m < 1$

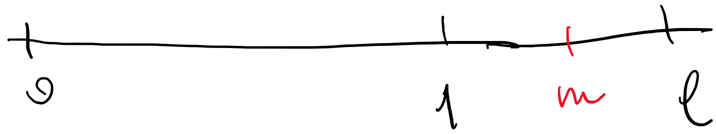
$\Rightarrow m^n \to 0$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0$

Th. dei Carabinieri $\Rightarrow a_n \to 0$.

2) $\ell > 1$



Come prima scelgo $1 < m < \ell$

e ottengo che $\forall n \geq \bar{n}$

$$\sqrt[n]{a_n} > m$$

$$\Rightarrow a_n > m^n \longrightarrow +\infty \quad \text{perché } m > 1$$

$$\Rightarrow a_n \longrightarrow +\infty.$$

Collegamento tra i due criteri.

<u>Teorema</u>: Se $a_n > 0$ definitivamente

e se $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

<u>Oss</u>: in questo caso non importa se

ℓ è $<$ o $>$ di 1.

<u>Oss</u>: potrebbe esistere $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

e non esistere $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Es: $a > 0$ fissato.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$$

prendo $a_n = a$ $\forall n$. (costante)

e calcolo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{a} = 1$

$\Rightarrow$ anche $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$

Es: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ?$

$a_n = n$ $\qquad \displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Es: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1.$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Es: potrebbe esistere $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

ma non $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[n]{1} & \leq & \sqrt[n]{a_n} & \leq & \sqrt[n]{2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{2}{1} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Es: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+\sin n}$

$$1 \leq 2+\sin n \leq 3$$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2+\sin n} \leq \sqrt[n]{3} \rightarrow 1$$

$$\sqrt[n]{2+\sin n} \to 1$$

In generale se $\exists\, a, b$ t.c.

$$0 < a \leq a_n \leq b$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

perché $\underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{a}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{b}}$

Es: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = ?$

$a_n = n!$ $\qquad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1 \longrightarrow +\infty$

quindi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$