Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prima verifica intermedia, 4 novembre 2019

Domanda 1 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x-2)e^{1-x^2}$

A) è limitata inferiormente ma non ha minimo B) ha minimo ma non ha massimo
C) ha sia massimo che minimo D) non ha né massimo né minimo

C

Domanda 2 La funzione $f(x) = \begin{cases} x^3+3x^2+x+1 & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ \dfrac{2x^2-(\sin x)^2}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$

A) è derivabile a destra ma non a sinistra in $x=0$ B) è derivabile in $x=0$
C) è derivabile a sinistra ma non a destra in $x=0$ D) non è derivabile né a destra né a sinistra in $x=0$

A

Domanda 3 La derivata della funzione $f(x) = x^4 \left(\log(x^4+1)+1\right)$ è

A) $\dfrac{16x^6}{x^4+1}$ B) $4x^3\left(\dfrac{2x^4+1}{x^4+1}+\log(x^4+1)\right)$
C) $x^3\left(\dfrac{4}{x^4+1}+x\log(x^4+1)\right)$ D) $x^3\left(\dfrac{x^4+x+1}{x^4+1}+4\log(x^4+1)\right)$

B

Domanda 4 $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{(1-\cos(x-3))\,(e^x-1)}{x(x-3)\log(x-2)} =$

A) 0 B) $+\infty$
C) $\dfrac{e^3-1}{6}$ D) $\dfrac{1}{2}$

C

Domanda 5 L'insieme $A = \{x\in\mathbb{R} : \cos(\sin x) > 0\}$

A) è limitato inferiormente ma non superiormente B) è limitato
C) è limitato superiormente ma non inferiormente D) non è limitato né inferiormente né superiormente

D

Domanda 6 Sia $A = \left\{x\in\mathbb{R} : e^x < \sqrt[3]{x^2+8}\right\}$. L'estremo superiore di A è

A) un numero reale strettamente maggiore di 0 B) $+\infty$
C) un numero reale strettamente minore di 0 D) 0

A

Domanda 7 La funzione $f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

A) ha un asintoto verticale e uno obliquo
B) ha un asintoto verticale e nessun altro asintoto
C) ha un asintoto verticale e uno orizzontale D) non ha nessun tipo di asintoto

C

Domanda 8 La funzione $f : [1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ definita da $f(x) = x+\dfrac{1}{x}$

A) è bigettiva B) è surgettiva ma non iniettiva
C) è iniettiva ma non surgettiva D) non è né iniettiva né surgettiva

C

Domanda 9 La funzione $f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

A) ha sia massimo che minimo B) è limitata ma non ha massimo
C) non è limitata e non ha asintoti D) ha un asintoto obliquo

A

Domanda 10 L'insieme $\left\{x\in\mathbb{R} : e^x + \dfrac{1}{|x|\log|x|} < 0\right\}$

A) è superiormente ma non inferiormente limitato B) è limitato
C) è inferiormente ma non superiormente limitato D) non è né inferiormente né superiormente limitato

B

codice 936171

Ex 1: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=(x-2)\,e^{1-x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)\cdot e^{-\infty}=(+\infty)\cdot 0=?$$

$$(x-2)\,e^{1-x^2}=\frac{x-2}{e^{x^2-1}}\longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=(-\infty)\cdot e^{-\infty}=(-\infty)\cdot 0=?$$

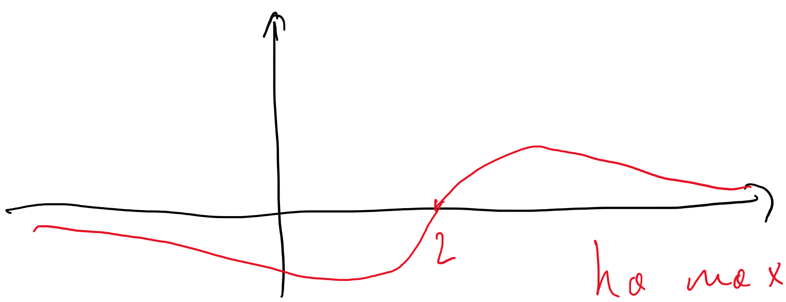
$$f(x)=\frac{x-2}{e^{x^2-1}}\longrightarrow 0$$

ha max o min?

$f(x)\geq 0$? $\quad f(x)\leq 0$? $\quad$ Weierstrass generalizzato.

$$(x-2)\,\underbrace{e^{1-x^2}}_{>0}\geq 0 \iff x-2\geq 0 \quad x\geq 2.$$

$$\Rightarrow f>0 \text{ se } x>2, \quad f<0 \text{ se } x<2$$



ha max e min

Ex 2:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+x+1 & \text{se } x<0 \\ 0 \quad \text{se} \quad x=0 \\ \dfrac{2x^2-(\sin x)^2}{x} & \text{se } x>0. \end{cases}$$

derivabilità in $x_0=0$. ?

è continua?

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3+3x^2+x+1 = 1 \neq f(0)=0$$

$\Rightarrow$ f non è continua a sinistra.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2-(\sin x)^2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2-(x+o(x^2))^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2-(x^2+o(x^3))}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x + o(x^2) = 0 \Rightarrow \text{f è continua a destra.}$$

vedo se è derivabile a destra.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2-(\sin x)^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2-(x^2+o(x^3))}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+o(x^3)}{x^2} = 1$$

$\Rightarrow$ f è derivabile a destra.

<u>Ex3</u>: $f(x) = x^4\left(\log(x^4+1)+1\right)$

$$f'(x) = 4x^3\left(\log(x^4+1)+1\right) + x^4 \frac{4x^3}{x^4+1} =$$

$$= 4x^3\left[\log(x^4+1)+1+\frac{x^4}{x^4+1}\right] =$$

$$= 4x^3\left[\log(x^4+1)+\frac{2x^4+1}{x^4+1}\right].$$

Ex 4: $$\lim_{x\to 3} \frac{(1-\cos(x-3))(e^x-1)}{x(x-3)\log(x-2)} =$$

$$= \frac{(1-\cos 0)\boxed{(e^3-1)}}{\boxed{3}\cdot 0 \cdot \log 1}$$

$$= \frac{e^3-1}{3}\cdot \boxed{\lim_{x\to 3} \frac{1-\cos(x-3)}{(x-3)\log(x-2)}}$$

$x-3=t$ se $x\to 3 \Rightarrow t\to 0$ $\quad x-2=t+1$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t\log(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)\right)}{t\,(t+o(t))} =$$

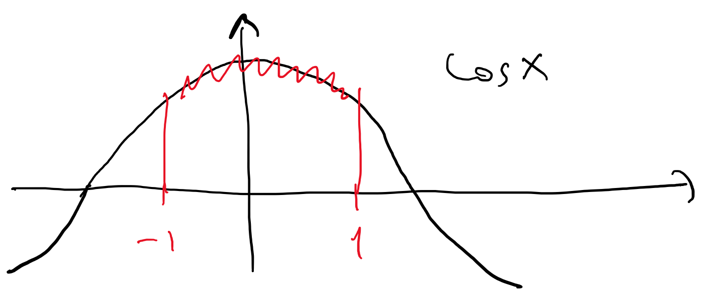
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2}{2}+o(t^3)}{t^2+o(t^2)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{e^3-1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{e^3-1}{6}.$$

Ex 5: $$A=\{x\in\mathbb{R} : \cos(\sin x)>0\}$$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$\Rightarrow \quad \cos(\sin x) > 0$ sempre



$\Rightarrow \quad A = \mathbb{R} . \quad \Rightarrow A$ non è limitato
né sup né inf.

<u>Ex 6</u>: $A = \{ x \in \mathbb{R} : e^x < \sqrt[3]{x^2+8} \}$

$\sup(A) = ?$

definiamo $f(x) = e^x - \sqrt[3]{x^2+8}$

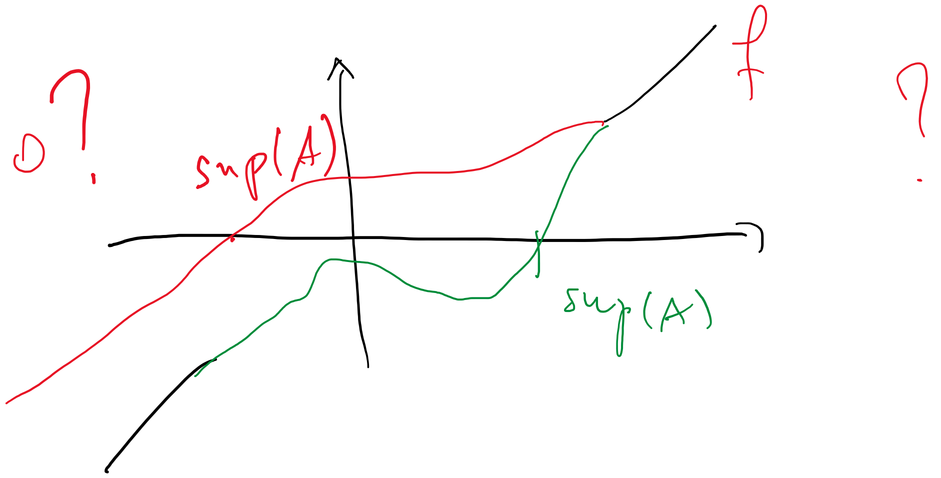
$A = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) < 0 \}.$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(1 - \frac{\sqrt[3]{x^2+8}}{e^x} \right)$$

$$= +\infty (1 - 0) = +\infty .$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-\infty} - \sqrt[3]{+\infty} = 0 - \infty = -\infty$$

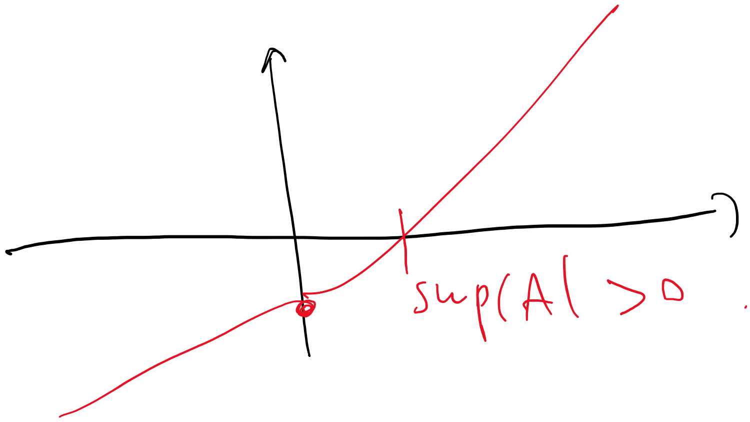
$f(x) < 0 ?$



$\Rightarrow \quad A$ è limitato superiormente

calcolo $f(0)$.

$f(0) = e^0 - \sqrt[3]{0+8} = 1 - 2 = -1 < 0$



Sup(A) è un numero > 0.

Ex 7: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

asintoti?

$$\lim_{x \to 0^+} 0\left(e^{\frac{1}{0^+}} - 1\right) = 0 \cdot \left(e^{\infty} - 1\right) = 0 \cdot \infty \;?$$

cambio di variabile $\frac{1}{x} = t$ se $x \to 0^+$
$\Rightarrow t \to +\infty$.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\left(e^{t} - 1\right) = +\infty$$

$\Rightarrow$ asintoto verticale di equaz. $x = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \infty\left(e^{\frac{1}{\infty}} - 1\right) = \infty\left(e^{0} - 1\right)$$

$$= \infty \cdot 0 = ?$$

$\frac{1}{x} = t \qquad e^{t} = 1 + t + o(t)$ se $t \to 0$

se $x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = x\left(\cancel{1} + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \cancel{1}\right) = 1 + o(1)$$

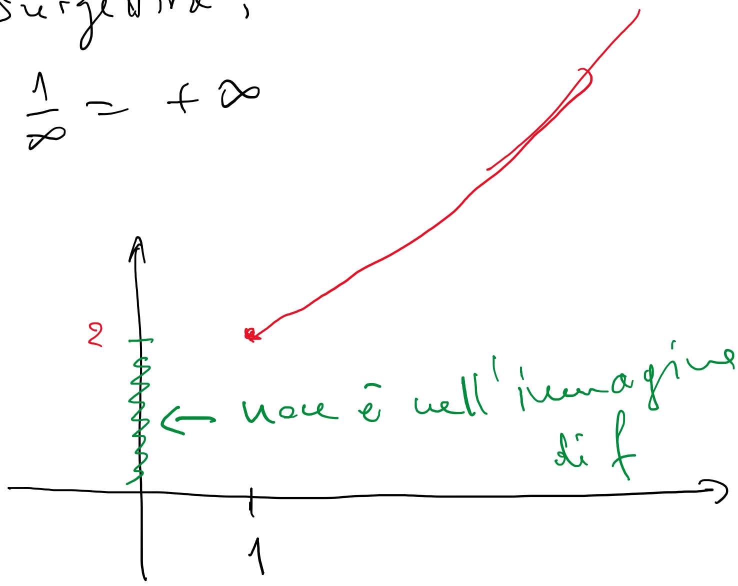
$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1. \Rightarrow \text{asintoto orizzontale.}$$

Ex 8: $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ $\qquad f(x) = x + \frac{1}{x}$

iniettiva? surgettiva?

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \frac{1}{\infty} = +\infty$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$



devo capire se f è crescente.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \qquad f' \geq 0 ?$$

$$1 - \frac{1}{x^2} \geq 0 \qquad 1 \geq \frac{1}{x^2} \iff x^2 \geq 1.$$

anzi $f'(x) > 0$ se $x > 1$.

$\Rightarrow f$ è strettamente crescente in $[1, +\infty)$

$\Rightarrow f$ è iniettiva. ma non surgettiva.

Ex 9: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \cos\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$

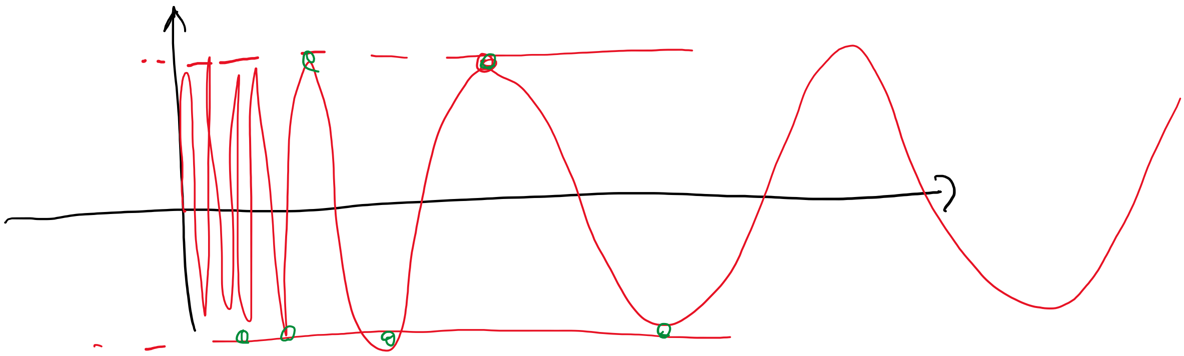
f è limitata perché $-1 \leq \cos t \leq 1 \quad \forall t$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\frac{x^2+1}{x}$ assume infinite volte un valore multiplo di 2π e anche di π

$\Rightarrow \cos\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ assume ∞ volte il valore 1 e il valore -1.

$\Rightarrow f$ ha sia max che min

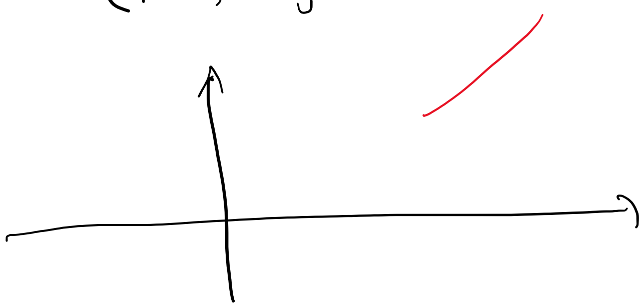


Ex 10: $A = \{x \in \mathbb{R} : e^x + \frac{1}{|x|\log|x|} < 0\}$

$$f(x) = e^x + \frac{1}{|x|\log|x|}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{+\infty} + \frac{1}{+\infty \log(+\infty)} = \infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{-\infty} + \frac{1}{(+\infty)\cdot\log(+\infty)} = 0 + 0 = 0$$



domanda: $f<0$ per $x \to -\infty$?

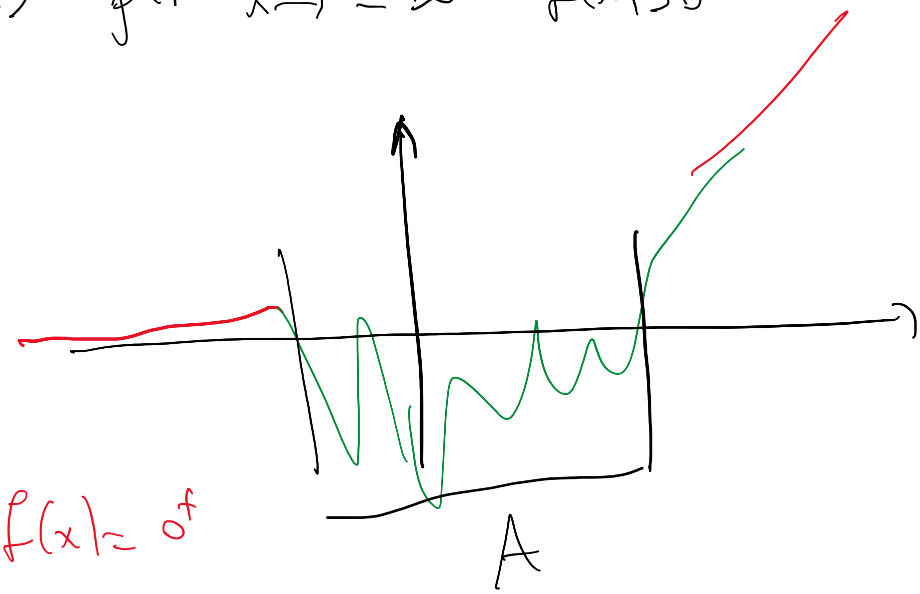
$$f(x) = e^x + \frac{1}{|x| \log|x|}$$

e^x: >0 sempre

$|x|$: >0

$\log|x|$ → è >0 se $|x|>1$

$\Rightarrow$ per $x \to -\infty$ $f(x)>0$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$$

A è limitato.

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x e^x + 2}{e^x + 1}$$

$e^x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f$ è definita in tutto $\mathbb{R}$.

f è continua e anche derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x e^x + 2}{e^x + 1} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{+\infty + 0}{1 + 0} = +\infty.$$

?

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x e^x + 2}{e^x + 1} = \frac{-\infty \cdot e^{-\infty} + 2}{e^{-\infty} + 1} = (*)$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{t \to +\infty} -t e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-t}{e^t} = 0$$

$x = -t$

$$(*) = \frac{0 + 2}{0 + 1} = 2$$

asintoto orizzontale $y = 2$ per $x \to -\infty$.

asintoto obliquo a $+\infty$?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x+2}{(e^x+1)x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x+2}{xe^x+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{xe^x}}{1+\frac{x}{xe^x}} \to 1$$

$\frac{2}{xe^x} \to 0$, $\frac{x}{xe^x} \to 0$

$\Rightarrow m = 1$.

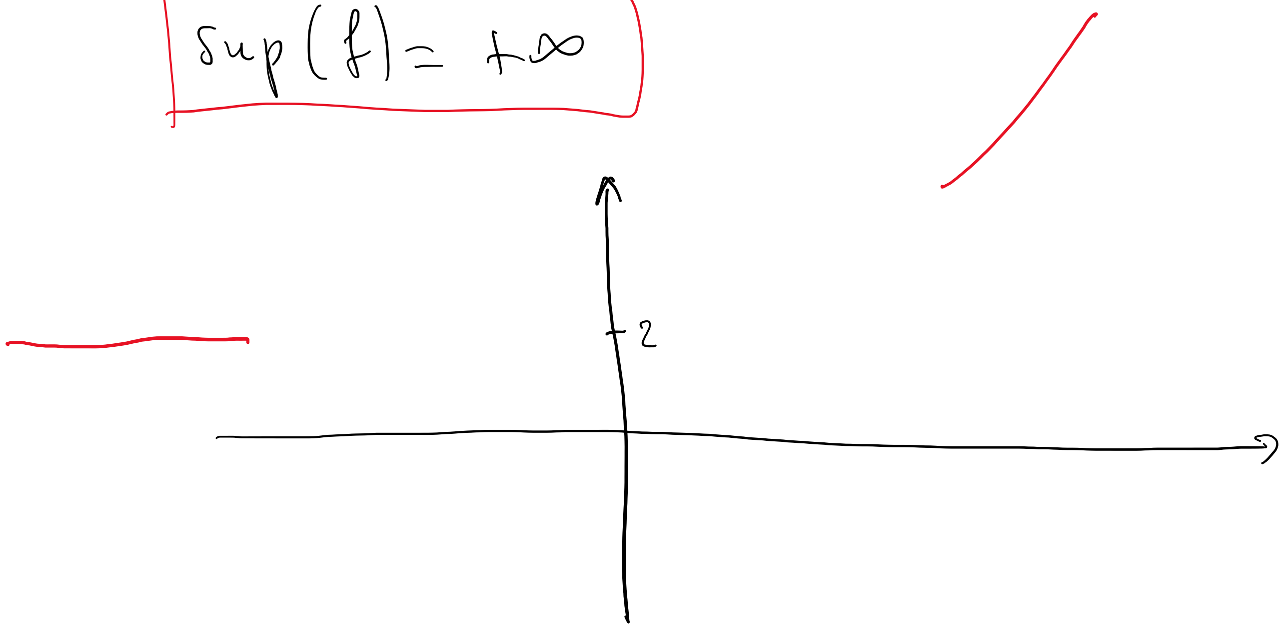
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x+2}{e^x+1} - x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x+2-x(e^x+1)}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-x}{e^x+1} = 0$$

$q = 0$ $\qquad y = mx+q = 1\cdot x + 0 = x$

$y = x$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

$\boxed{\sup(f) = +\infty}$



Cerco max e min <u>locali</u> $\quad f(x) = \frac{xe^x+2}{e^x+1}$

$$f'(x) = \frac{(e^x + x e^x)(e^x+1) - (x e^x + 2)\cdot e^x}{(e^x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x + \cancel{x e^{2x}} + x e^x - \cancel{x e^{2x}} - 2e^x}{(e^x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} + x e^x - e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x + x - 1)}{(e^x+1)^2}$$

$f'(x) > 0$? $\qquad e^x > 0$ sempre

$\qquad (e^x+1)^2 > 0$ sempre.

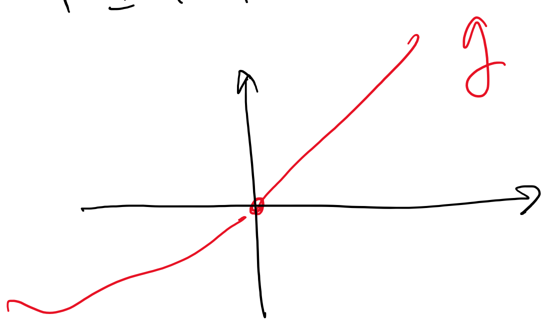
quindi $f'(x) > 0 \iff \boxed{e^x + x - 1 > 0}$

definiamo $g(x) = e^x + x - 1$ e studiamo il segno di g.

$g'(x) = e^x + 1 > 0$ sempre.

$\Rightarrow g$ è strettamente crescente.

$g(0) = e^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$



$\Rightarrow g(x) < 0$ se $x < 0$

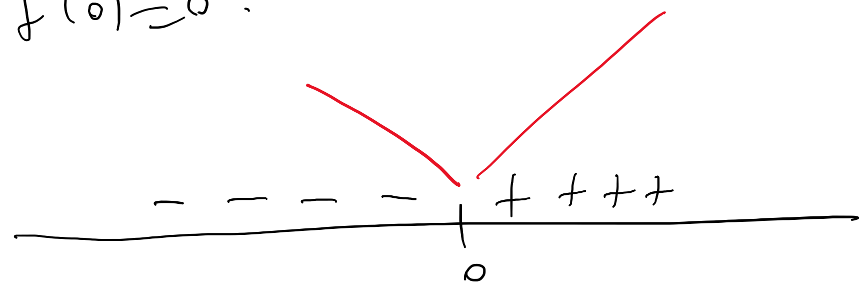
$g(x) > 0$ se $x > 0$

$\Rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad$ se $x > 0$

$f'(x) < 0 \quad$ se $x < 0$

$f'(0) = 0$.

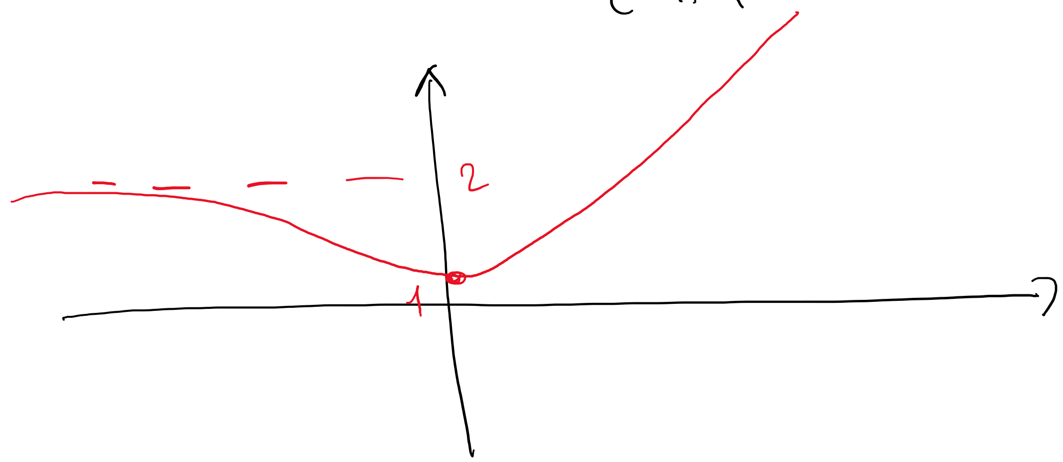
segno di f'



f è decrescente strettamente in $(-\infty, 0]$
e strettamente crescente in $[0, +\infty)$

$\Rightarrow x = 0$ è punto di minimo locale e assoluto.

$$\Rightarrow \min(f) = f(0) = \frac{0 \cdot e^0 + 2}{e^0 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$



Studiare

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & \text{se } x \geq 0 \\ |1+x| - 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

insieme di definizione

$1+x>0 \qquad x>-1$ va bene perchè $x \geq 0$

f è definita $\forall x \in \mathbb{R}$.

f è continua? In tutti i punti $x \neq 0$

è sicuramente continua. Vediamo in $x=0$.

$f(0) = \log(1+0) = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} |1+x| - 1 = |1+0| - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \log(1+x) = \log 1 = 0.$$

$\Rightarrow$ f è continua in $x=0$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log(1+x) = \log(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} |1+x| - 1 = |-\infty| - 1 = +\infty$$

$\Rightarrow \quad \sup(f) = +\infty.$

f non ha asintoti orizzontali

obliqui?

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+x)}{x} = 0$$

consideriamo $x<0$

$\Rightarrow f(x) = |1+x| - 1$

dove cambia segno $1+x$?

$1+x>0 \iff x>-1$

$$\Rightarrow |1+x| = \begin{cases} 1+x & \text{se } x \geq -1 \\ -1-x & \text{se } x<-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \cancel{1}+x-\cancel{1} & \text{se } x \in [-1,0) \\ -1-x-1 = -x-2 & \text{se } x \in (-\infty,-1) \end{cases}$$

La funzione ha ovviamente un asintoto obliquo di equazione $y = -x-2$ per $x \to -\infty$.

punto angoloso per $x=-1$

perchè $f'_-(-1) = -1$, $f'_+(-1) = 1$

in $x=0$ è derivabile?

$f'_-(0) = 1$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-0}{x} = 1.$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x=0$.

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ se $x>0$.

per $x<0$ è ovvio.

f è decrescente in $(-\infty, -1]$

f è crescente in $[-1, +\infty)$

$\Rightarrow$ $x=-1$ è punto di minimo assoluto

$\min(f) = f(-1) = |1-1| - 1 = -1$