Successioni

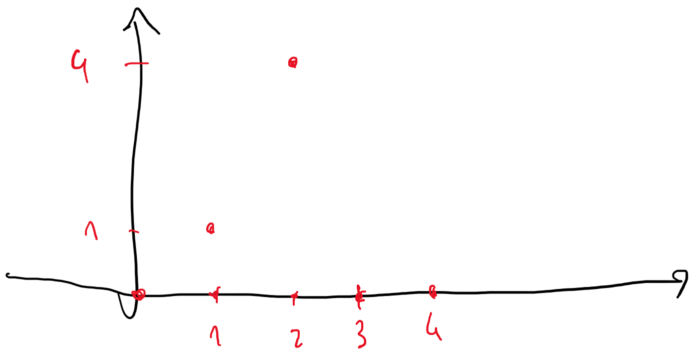
Def: Una funzione che ha come dominio una semiretta di $\mathbb{N}$ si dice successione.

S = semiretta di $\mathbb{N}$

$$S = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \}$$

$f : S \to \mathbb{R}$ ← successione.

Es: $f(n) = n^2$, $S = \mathbb{N}$



Es: $S = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \}$

$f(n) = \frac{1}{n}$

Notazione: Invece di scrivere $f(n)$ si scrive a_n

$a_n = n^2$, $a_n = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $a_5 = \frac{1}{5}$

per indicare tutta la successione si scrive $\{a_n\}$ oppure $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n\in S}$

Es: $a_n = \frac{1}{n-5}$

ha senso se $n \neq 5$ però il dominio non può essere $\{n \in \mathbb{N} : n \neq 5\}$ perché non è una semiretta. Il dominio sarà $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 6\}$.

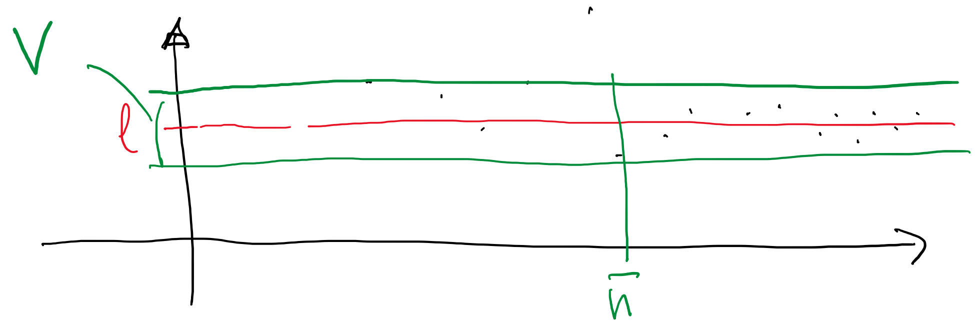
Limite di una successione

Ha senso solo fare il limite per $n \to +\infty$ perché è l'unico punto di accumulazione.

Es: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Come diventa la definizione di limite?

Si dice che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ se $\forall\, V$ intorno di ℓ $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. se $n \geq \bar{n}$ allora $a_n \in V$.



Se un predicato $P(n)$ che dipende da $n \in \mathbb{N}$ è vero $\forall n \geq \bar{n}$ si dice che $P(n)$ è vero definitivamente

Es: $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ se $\forall V$ intorno di l risulta $a_n \in V$ definitivamente.

Sottosuccessioni estratte

Data $a_n : S \longrightarrow \mathbb{R}$ successione

considero $k_n : \mathbb{N} \longrightarrow S$ strettamente crescente (k_n è a valori interi)

Considero ora la composizione con a_n

cioè

$$a_{k_n}.$$

Ottengo una nuova successione che si dice sottosuccessione estratta da $\{a_n\}$.

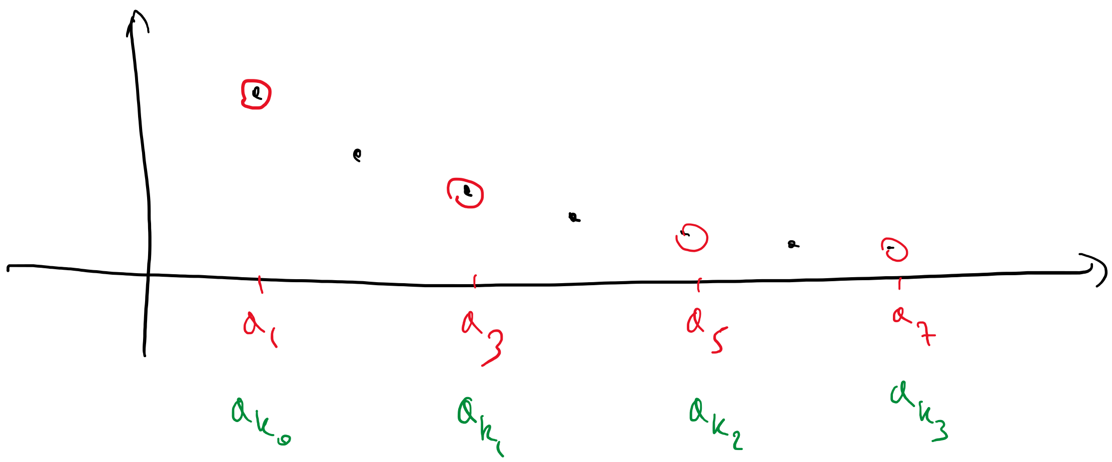
Vuol dire che seleziono solo alcuni elementi della successione, ne seleziono infiniti e in ordine crescente.

Es: $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad k_n = 2n+1$

$$a_{k_n} = \frac{1}{2n+1}$$

$a_{k_0} = \frac{1}{1} \quad a_{k_1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \quad a_{k_2} = \frac{1}{5} \quad \dots$

ho selezionato solo gli indici dispari.

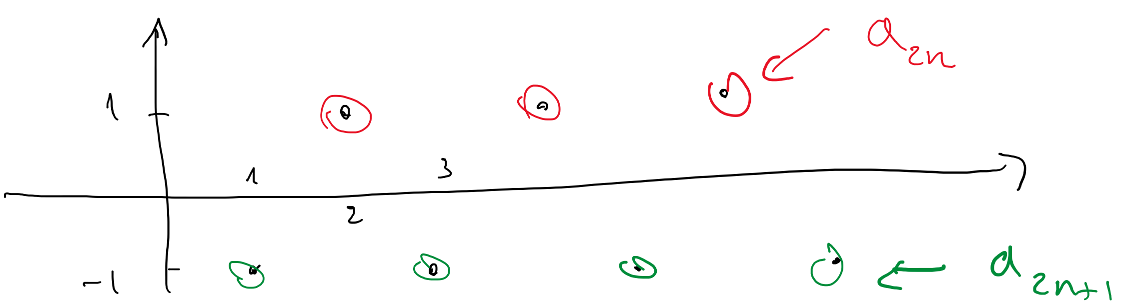


<u>Teorema</u>: $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ se e solo se

$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = l$ per ogni sottosuccessione estratta da $\{a_n\}$.

Serve a dimostrare che il limite non esiste.

<u>ES</u>: $a_n = (-1)^n$



come si dimostra facilmente che il limite non esiste?

Considero le estratte pari e dispari

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = \left[(-1)^2\right]^n = 1 \quad \leftarrow \text{pari}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$$

dispari

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = (-1)\cdot(-1)^{2n} = -1\cdot 1 = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$$

I limiti sono diversi $\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} a_n$.

Valgono molti dei teoremi corrispondenti per le funzioni.

ES: somma e prodotto di limiti, permanenza del segno, Carabinieri, confronto...

Monotonia

La successione $\{a_n\}$ è debolmente crescente se $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ con $n<m$ risulta $a_n \leq a_m$. (mantiene l'ordinamento)

È la stessa definizione delle funzioni di variabile reale.

Nel caso delle successioni diventa più semplice.

Oss: $\{a_n\}$ è debolmente crescente se e solo se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

cioè mi basta confrontare un termine con il successivo.

Infatti se $n < m \Rightarrow$

$$a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq \dots \leq a_m$$

Es: $a_n = n^2$ vediamo che è strettam. crescente.

$$a_n < a_{n+1} \iff n^2 < (n+1)^2$$

$$\iff \cancel{n^2} < \cancel{n^2} + 2n + 1 \qquad 0 < 2n+1 \text{ vera}$$

perchè $n \in \mathbb{N}$ quindi $n \geq 0$.

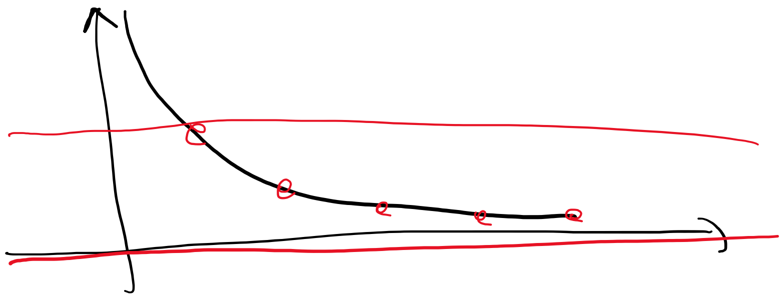
Def: se $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ finito allora si dice che $\{a_n\}$ è convergente

Se $\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$ si dice che è divergente.

Oss: Una successione convergente è limitata.

Per le funzioni non è vero.

<u>Es</u>: $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad f:(0,+\infty)$.



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ è convergente all'∞.

ma non è limitata perché

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \Rightarrow \sup(f)=+\infty$.

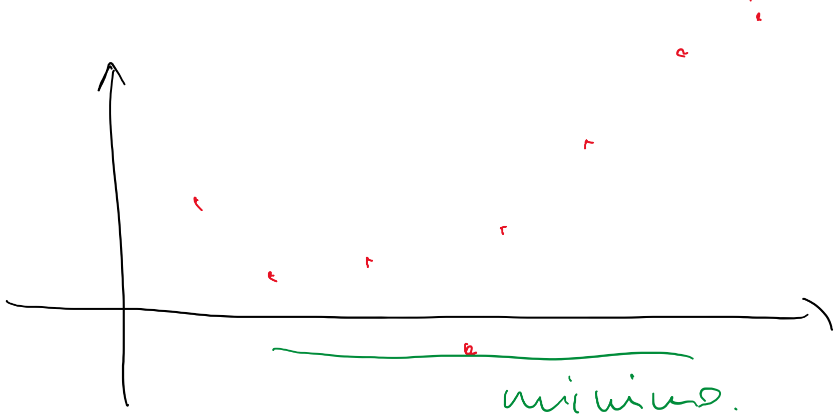
Invece $a_n=\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ e $\{a_n\}$ è limitata.

<u>Teorema</u>: Se $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$

$\Rightarrow \{a_n\}$ ha minimo.

Se $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \Rightarrow \{a_n\}$ ha massimo.



Problema: Se $\{a_n\}$ è limitata ha necessariamente max e min?

No.

Es: $a_n = \frac{1}{n}$. È limitata

$\max\{a_n\} = 1 \qquad \inf\{a_n\} = 0$

ma non ha minimo perché se lo avesse sarebbe $\min a_n = \inf a_n = 0$

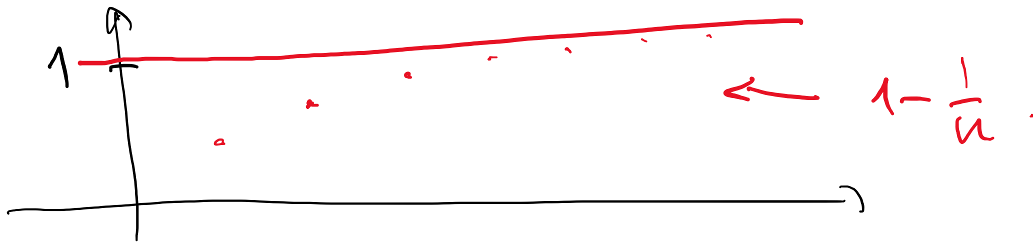
$\Rightarrow$ dovrebbe esistere n: $a_n = 0$ cioè $\frac{1}{n} = 0$

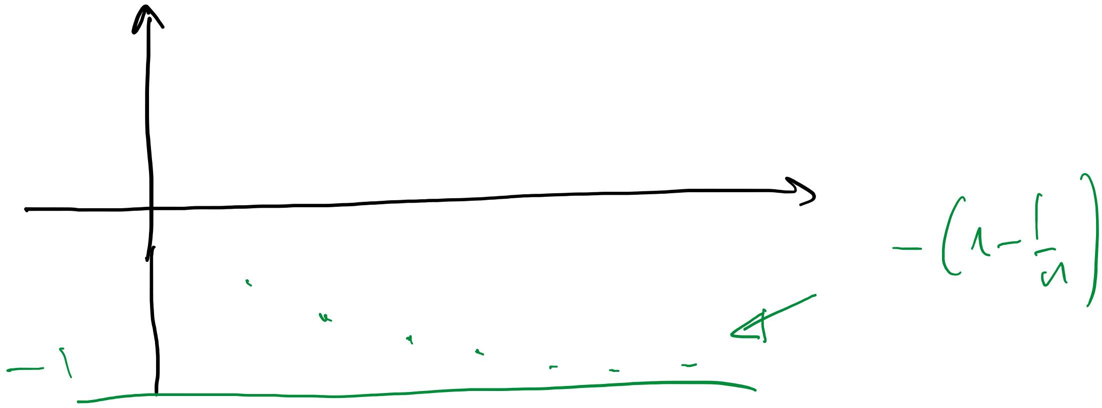
impossibile.

Domanda: Se è limitata ha almeno uno dei due tra max e min?

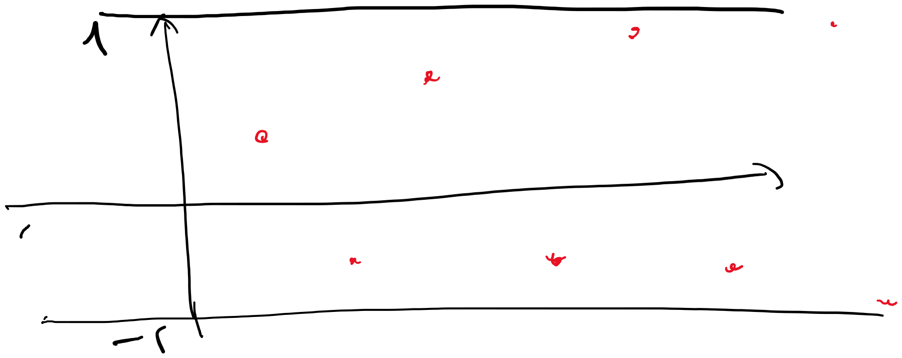
Potrebbe non avere nessuno dei due.

Es: $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(-1)^n$.





prendo i termini pari del grafico positivo e quelli dispari del grafico negativo.



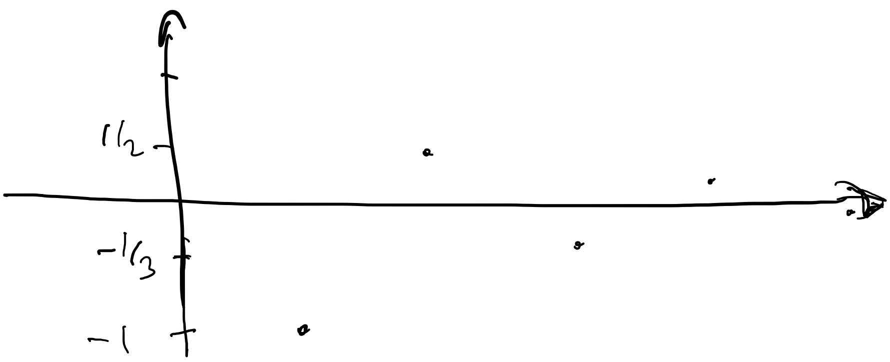
$\sup a_n = 1$, $\inf a_n = -1$

ma non ha né max né min.

$\{a_n\}$ è limitata perché

$$-1 < a_n < 1.$$

Es: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ha max e min?



$a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = -\frac{1}{3} \quad a_4 = \frac{1}{4}$

ha sia max che min

$\max a_n = \frac{1}{2} \qquad \min a_n = -1.$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Teorema: Se $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ finito e $\exists\, \bar{n}$ t.c. $a_{\bar{n}} \geq l \Rightarrow \{a_n\}$ ha massimo.

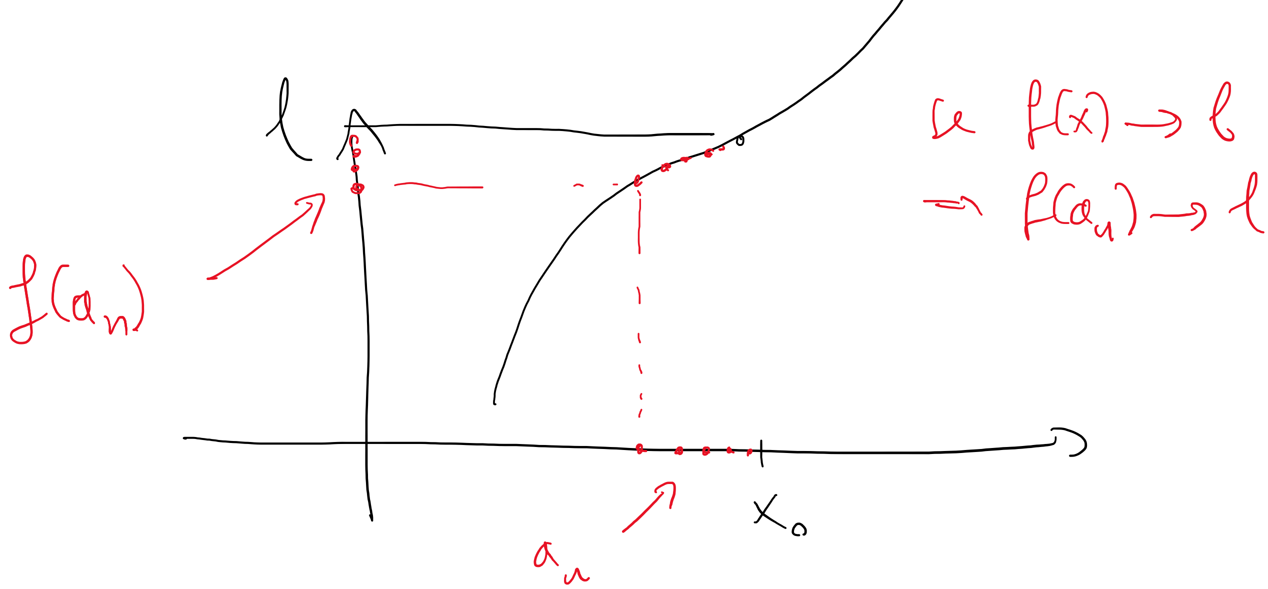
Se $\exists\, \bar{n}$ t.c. $a_{\bar{n}} \leq l \Rightarrow \{a_n\}$ ha minimo.

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f: A \to \mathbb{R}$. Allora risulta che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se e solo se

$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$ $\forall$ successione $\{a_n\} \subset A$ t.c. $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$ e

$a_n \neq x_0$ definitivamente.



È utile quando voglio dimostrare che un limite non esiste.

Es: proviamo che $\nexists \lim_{x \to \infty} \sin x$.

prendo $a_n = n\pi$ in questo caso $x_0 = +\infty$.

ovviamente $\lim_{n \to \infty} n\pi = +\infty = x_0$.

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} \sin(a_n) = \lim_{n \to \infty} \sin(n\pi) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} 0 = 0 \quad \text{perché } n \in \mathbb{N}.$$

ora prendo $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = +\infty = x_0$$

$$\lim_{n \to \infty} f(b_n) = \lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

allora $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$.