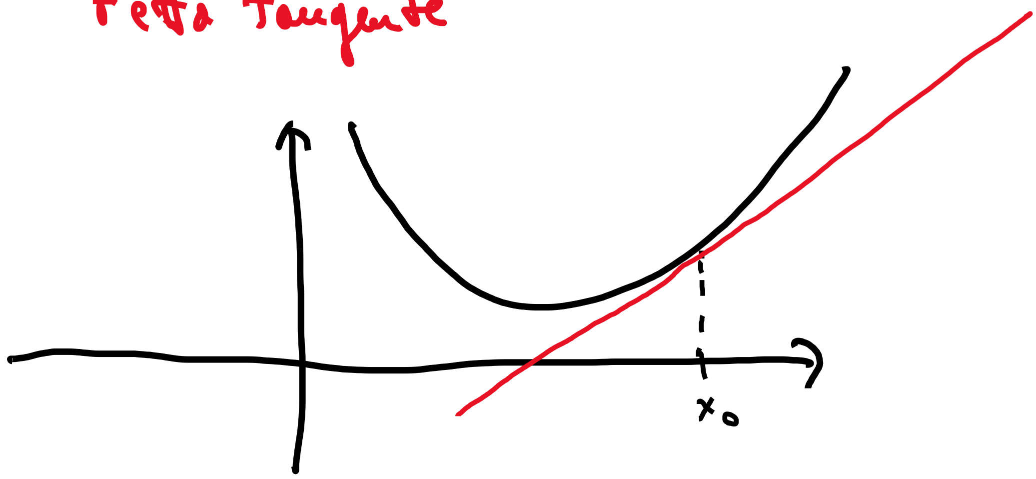
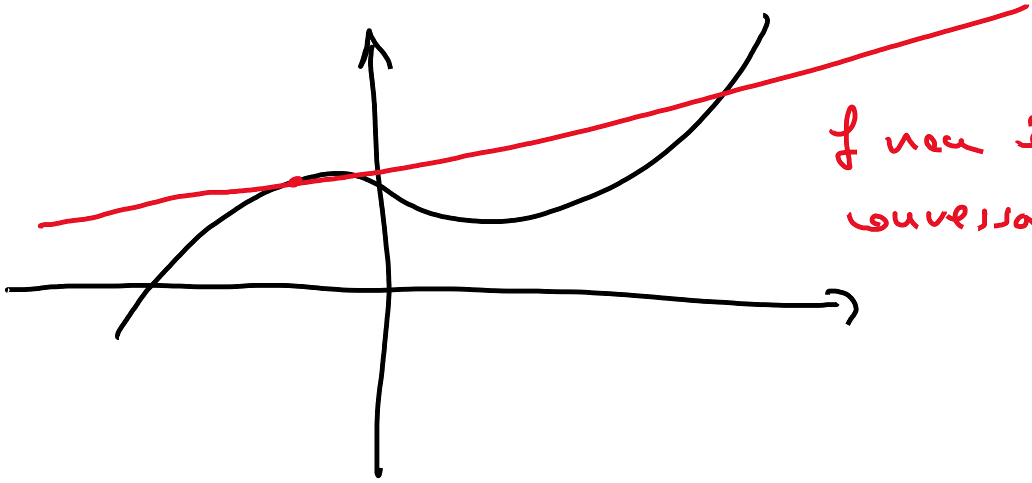
Prop $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile

f è convessa in I se $\forall x_0 \in I$ il grafico di f è sopra la tangente tracciata nel punto di ascissa x_0, cioè

$$f(x) \geq \underbrace{\boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}}_{\text{retta tangente}} \quad \forall x, x_0 \in I.$$





f non è convessa

Prop: $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo.

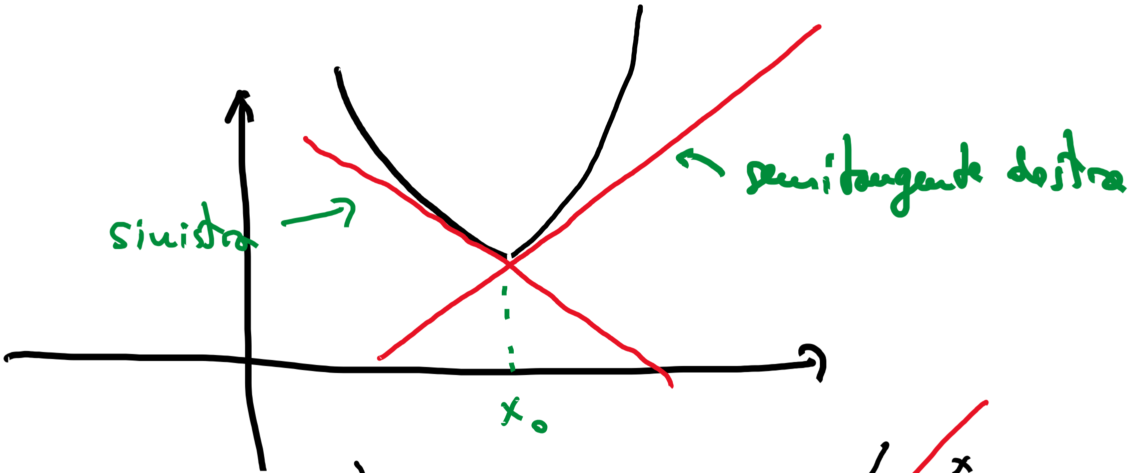
Supponiamo che in ogni punto di I f sia derivabile a destra e a sinistra (con derivate non necessariamente uguali tra loro).

Allora f è convessa in I se in ogni punto di I il grafico è sopra le semi-tangenti destra e sinistra, cioè

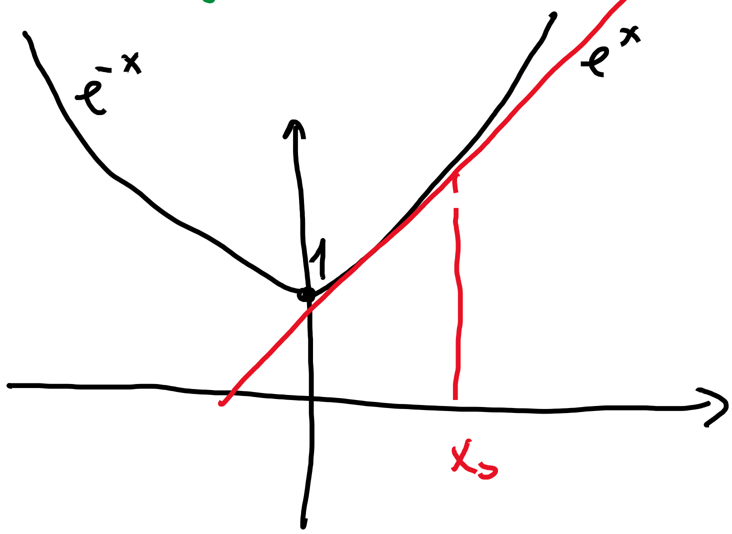
$$f(x) \ge \boxed{f(x_0) + f'_+(x_0)(x-x_0)} \quad \text{semi-tangente destra}$$

$$\forall\, x, x_0 \in I$$

$$f(x) \ge \boxed{f(x_0) + f'_-(x_0)(x-x_0)} \quad \text{semitangente sinistra.}$$



Es: $f(x) = e^{|x|}$



f è pari

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{se } x \ge 0 \\ e^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è convessa? Se $x_0 \neq 0$ f è derivabile e il grafico sta sopra la tangente. Perché?

Prendiamo $x_0 > 0 \Rightarrow f(x) = e^{x}$ ma $f'(x) = e^{x}$

$f''(x) = e^{x} > 0 \Rightarrow f$ è convessa $\Rightarrow$ sicuramente

$e^x >$ tangente $\forall x \geq 0$. L'altra metà del grafico è sopra la tangente? Sì, perché la retta tangente interseca l'asse y sotto il punto 1 e la metà sinistra del grafico è tutta >1.

Stessa cosa se $x_0 < 0$.

Resta solo $x_0 = 0$.

$f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$

infatti: f è continua in $x_0 = 0$ allora

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1$$

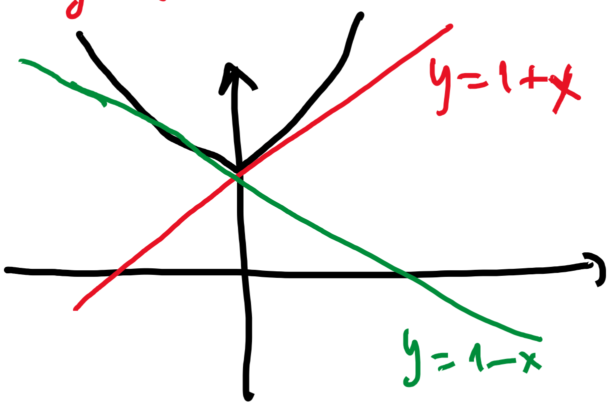
$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -e^{-x} = -1$$

semitangente destra in $x_0 = 0$

$y = 1 + x \longrightarrow y = f(0) + f'_+(0)(x - 0)$

semitangente sinistra in $x_0 = 0$

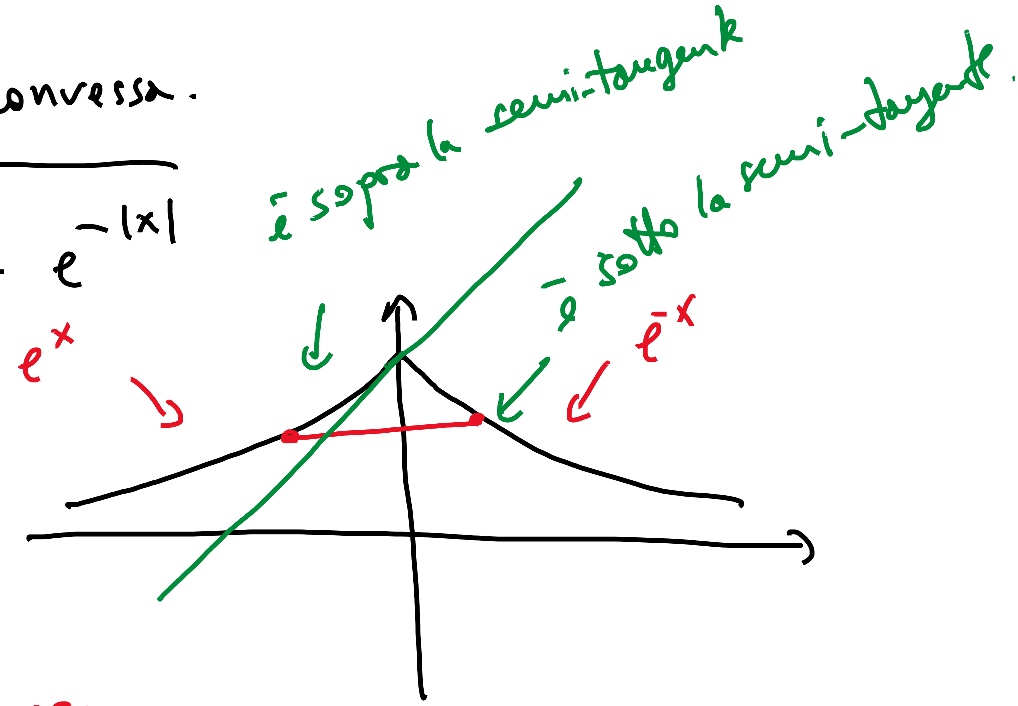
$y = 1 - x \longrightarrow y = f(0) + f'_-(0)(x - 0)$



$f(x) \geq 1 + x$
$f(x) \geq 1 - x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f$ è convessa.

Es: $f(x) = e^{-|x|}$



non è convessa.

Cosa succede se studio la derivata 2ª?

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ e^{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ e^{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f''(x) > 0$ sia che sia $x > 0$ o $x < 0$.

ma f è convessa in $\mathbb{R}$ perché non è derivabile 2 volte in $x = 0$.

Cosa posso dire?

f è convessa in $(-\infty, 0]$

f è convessa in $[0, +\infty)$

ma non è convessa in $\mathbb{R}$.

Es: $f(x) = x^4$ è convessa?

$f'(x) = 4x^3 \qquad f'' = 12x^2 \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f è convessa.

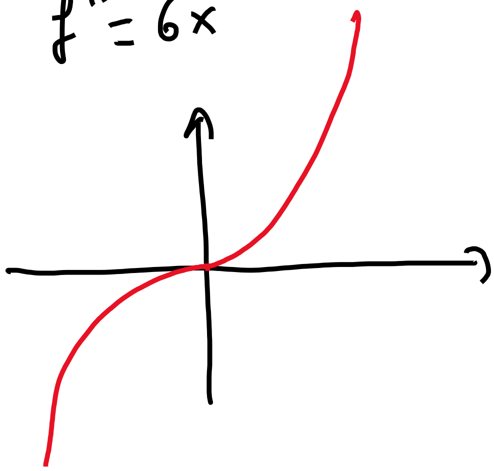
Es: $f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2 \qquad f'' = 6x$

$6x \geq 0$ se $x \geq 0$

$6x \leq 0$ se $x \leq 0$

f è convessa in $[0, +\infty)$

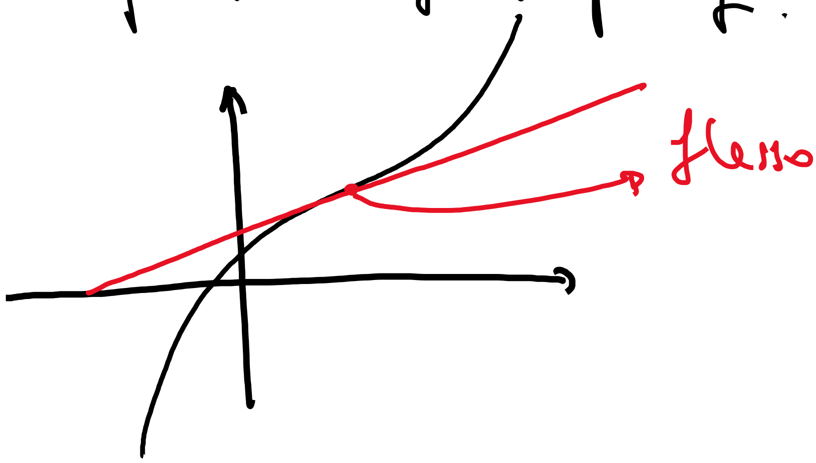
f è concava in $(-\infty, 0]$.

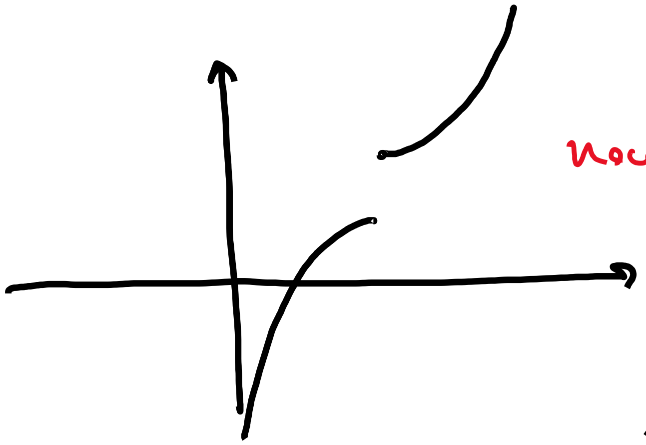


Punto di flesso

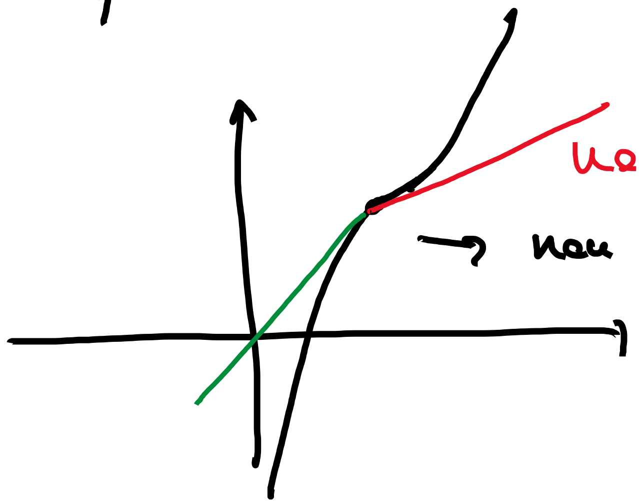
Def. Se f è continua in x_0, se esiste $f'(x_0)$ (non necessariamente finito) e f è convessa in un intorno destro di x_0 e concava in un intorno sinistro di x_0 (o viceversa) allora x_0 si dice punto di flesso per f.

Es:



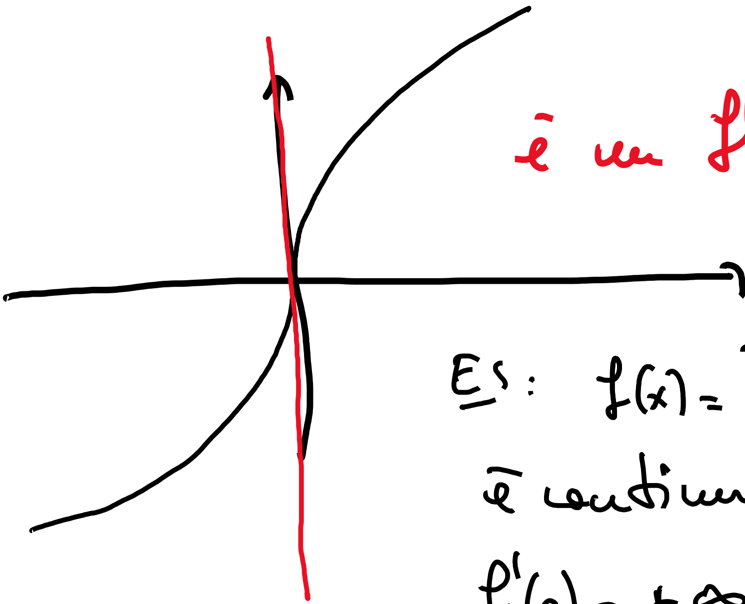


non è un flesso



non è un flesso

→ non ha derivata (punto angoloso)



è un flesso.

$f'(0) = +\infty$

Es: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

è continua e

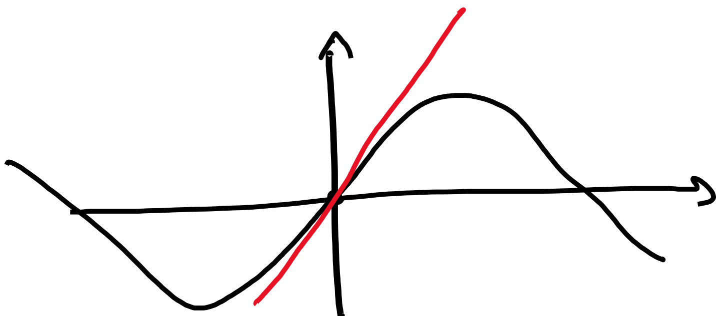
$f'(0) = +\infty$.

$f''(0) < 0$ se $x > 0$

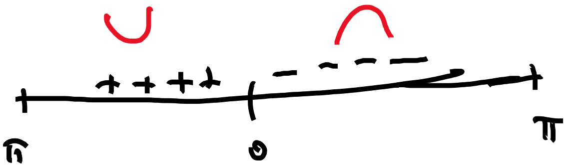
$f''(0) > 0$ se $x < 0$

$f(x) = x^{1/3}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$ $\quad f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3}$

Es: $f(x) = \sin x$



$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x$



f è convessa a sinistra di $x=0$
e concava a destra di $x=0$ (in un intorno)

$\Rightarrow x=0$ è punto di flesso.

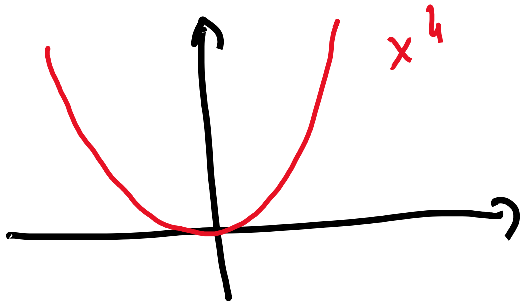
Oss: Se f è derivabile 2 volte in x_0 e x_0 è punto di flesso allora $f''(x_0)=0$.

È una condizione necessaria ma non suff.

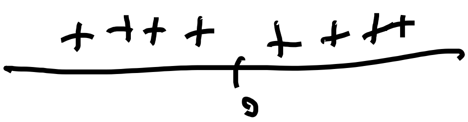
Es: $f(x) = x^4 \qquad f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$ ma $x=0$ non è punto di flesso

f è convessa in tutto $\mathbb{R}$.



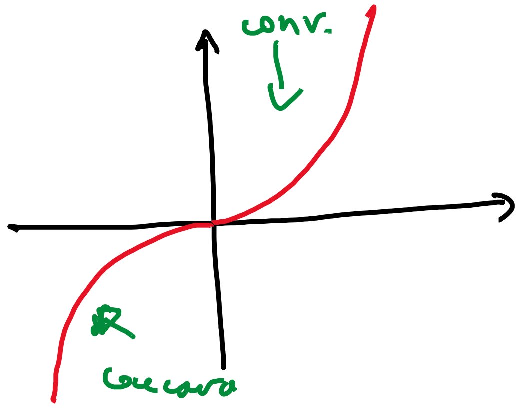
segno di f''



Possono esistere flessi dove non esiste la derivata seconda.

Es: $f(x) = x \cdot |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



se $x > 0$ $\quad f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2 \longrightarrow$ convessa

se $x < 0$ $\quad f'(x) = -2x \quad f''(x) = -2 \longrightarrow$ concava

f è continua in $\mathbb{R}$

$f'_+(0) = 0 \quad , \quad f'_-(0) = 0 \quad \Rightarrow f'(0) = 0$

f è derivabile in $x = 0$.

$\rightarrow f$ ha un flesso in $x = 0$

f è derivabile 2 volte in $x = 0$?

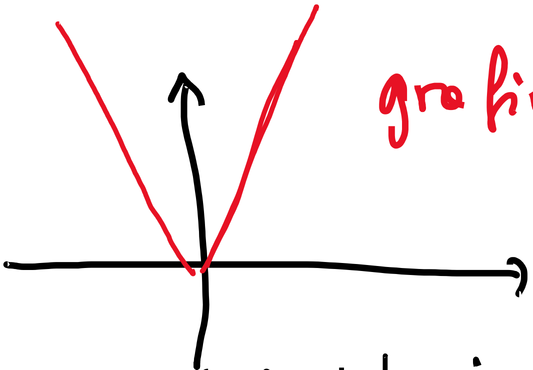


grafico di $f'(x)$

f' non è derivabile in $x = 0 \Rightarrow \nexists f''(0)$.

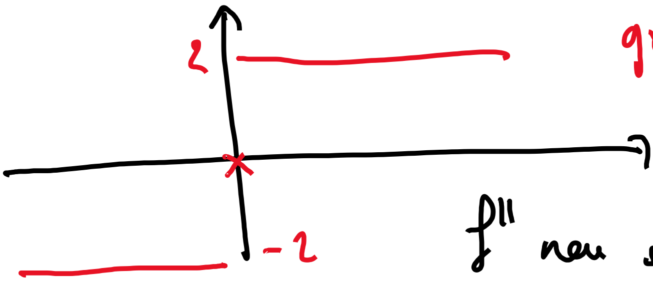


grafico di f''

$\nexists$ in $x = 0$

f'' non si annulla mai.

Studiere $f(x) = e^{1/x}$.

Insieme di definizione: $x \neq 0$ perché c'è $\frac{1}{x}$.

$\Rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ insieme di definizione.

Limiti

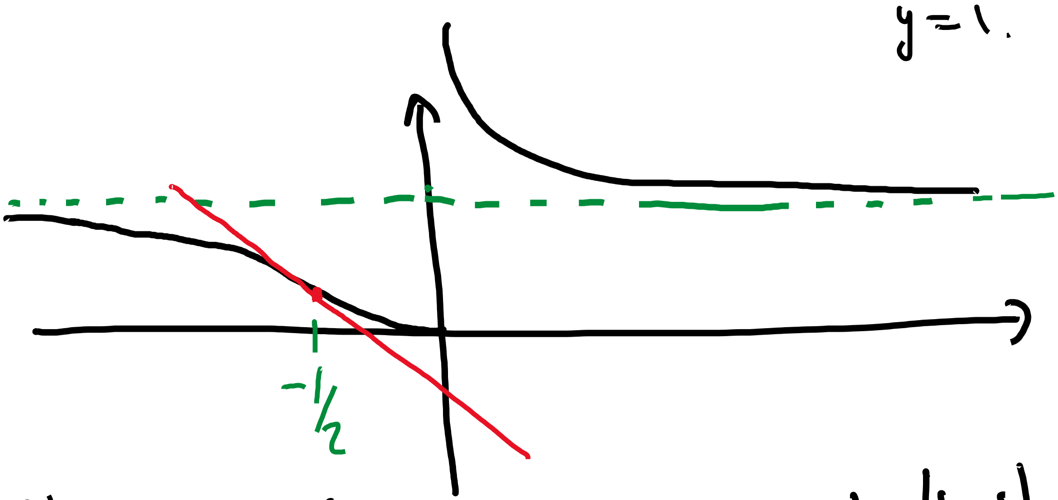
$$\lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^{0^-} = 1^-$$

asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0^+$$ (ovvio perché $f > 0$ sempre)

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow$$ asintoto verticale $x = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^{0^+} = 1^+$$ asintoto orizzontale $y = 1$.



$\sup(f) = +\infty$ (f non è superiormente limitata).

$\inf(f) = 0$ perché $f(x) > 0 \ \forall x$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

f non ha né max né min.

non ha max perché $\sup|f| = +\infty$

non ha minimo perché se lo avesse dovrebbe essere $\min|f| = \inf(f) = 0$ quindi dovrebbe esistere x_0 t.c. $f(x_0) = 0$ cioè $e^{1/x_0} = 0$ impossibile.

Derivata

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

$\Rightarrow$ f è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

non è decrescente su tutto il suo dominio.

(strettamente decrescente)

$\Rightarrow$ non ci sono punti di max o di min locali.

Convessità.

$$f'(x) = e^{1/x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -x^{-2} e^{1/x}$$

$D(e^{1/x}) = D(x^{-1}) = -x^{-2}$

$$f''(x) = -(-2)\, x^{-3} e^{1/x} + x^{-2} e^{1/x} x^{-2}$$

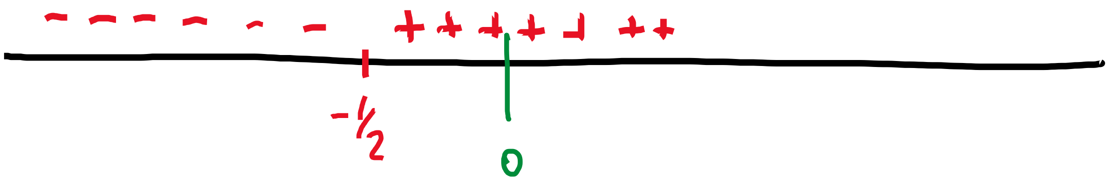
$$= 2x^{-3} e^{1/x} + x^{-4} e^{1/x} = x^{-4} e^{1/x} (2x+1) = \frac{(2x+1)e^{1/x}}{x^4}$$

segno di f'': $\quad e^{1/x} > 0$ sempre

$x^4 > 0 \quad \forall x \neq 0.$

$\Rightarrow$ segno di f'' è il segno di $2x+1$

$$2x+1 \geq 0 \iff 2x \geq -1 \iff x \geq -\frac{1}{2}$$



f è concava in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

è convessa in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$

è convessa in $(0, +\infty)$.