Formula di Taylor

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Resto di Lagrange

Se f è derivabile $n+1$ volte in (a,b), tranne al più il punto x_0, allora $\exists\, z \in (a,b)$ t.c.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)\,(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

z è un punto compreso tra x e x_0.

Esempi di formula di Taylor

$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0 \quad \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \quad \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0 \qquad \ldots$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k}{k!} =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

nel caso di $f(x) = \sin x$

$$P_3(x) = \underset{f(0)}{0} + \underset{f'(0)}{1} \cdot x + \frac{\overset{f''(0)}{0}}{2!} x^2 + \frac{\overset{f'''(0)}{(-1)}}{3!} x^3 =$$

$$= x - \frac{x^3}{6}$$

$f(x) = P_3(x) + R_3(x)$ nel caso di $\sin x$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x)$ ma $R_3(x) = o(x^3)$

$$\Rightarrow \boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

sapevamo che $\sin x = x + o(x)$

è in contrasto con ?

No, perché $-\frac{x^3}{6} + o(x^3) = o(x)$

infatti $\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \to 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

solo potenze dispari (il seno è una funzione dispari).

$f(x) = \sin x$ $\quad P_1(x) = x$ $\quad P_2(x) = x + \frac{0 \cdot x^2}{2} = x$

$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$

$$\sin x = x + o(x) \leftarrow P_1$$

$$\sin x = x + o(x^2) \leftarrow P_2$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

dispari

$$\sin x = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \right) + o(x^{2n+2})$$

Analogamente

pari

$$\cos x = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \right) + o(x^{2n+1})$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

si guadagna una potenza di grado più alto

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + 0 \cdot \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1 \quad \dots$$

$$e^x = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) + o(x^n) =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\log(1+x) = \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right) + o(x^n)$$

non c'è il fattoriale

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$$

è legato al grado del polinomio

$$\operatorname{arctg} x = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right) + o(x^{2n+2}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$

non c'è il fattoriale

Binomiale $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3$$

$$+ \dots$$

Es: $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

Es: $\lim_{x\to 0} \boxed{\frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1}}$ $f(x)$

$\sin x = x + o(x^2)$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$\log(1+x) = x + o(x)$

$$f(x) = \frac{\cancel{x} + o(x^2) - \cancel{x}}{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - (\cancel{x} + o(x)) - \cancel{1}} = \frac{o(x^2)}{o(x)} \quad ?$$

perché è indeterminata?

potrebbe essere $o(x^2) = x^4$ e $o(x) = x^2$

$\Rightarrow$ sarebbe $\frac{x^4}{x^2} = x^2 \to 0$

ma potrebbe essere $o(x^2) = x^3$ $o(x) = x^5$

$\Rightarrow$ $\frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2} \to +\infty$

devo capire meglio cosa vuol dire in questo caso $o(x^2)$ e $o(x)$.

vado avanti col grado dei polinomi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$f(x) = \frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1} = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x}}{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \cancel{1}}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{x}{6} + o(x^2)}{1 + o(1)} \longrightarrow 0$$

$e^x - \log(1+x) - 1$ proviamo ad aumentare il grado di e^x ma non del $\log(1+x)$

cioè $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\quad \log(1+x) = x + o(x)$

$$\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(\cancel{x} + o(x)\right) - \cancel{1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x) = o(x)$$

non serve a niente.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4}$$

$\sin(t) = t + o(t^2) \qquad t = x^2$

$\sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$

$(\sin x)^2 = (x + o(x^2))^2 = x^2 + 2x\, o(x^2) + (o(x^2))^2$

$= x^2 + o(x^3) + o(x^4) = x^2 + \boxed{o(x^3)}$

$$\frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4} = \frac{\cancel{x^2} + o(x^4) - (\cancel{x^2} + o(x^3))}{x^4}$$

$$= \frac{o(x^3)}{x^4} = \frac{o(1)}{x} = \frac{0}{0} \; ?$$

preciso meglio $(\sin x)^2$

usando $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2$$

dove compare o-piccolo nei doppi prodotti e nei quadrati?

$x \cdot o(x^4) \qquad x^3 \cdot o(x^4) \qquad (o(x^4))^2$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$\boxed{o(x^5)} \qquad o(x^7) \qquad o(x^8)$

$\rightarrow$ è quello che resta di più

posso trascurare tutte le potenze di grado > 5.

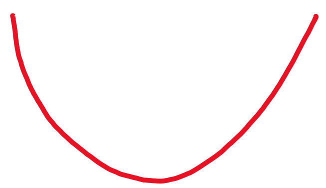
$$\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2 = x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^5)$$

$$\frac{(\sin x)^2-\sin(x^2)}{x^4} = \frac{\cancel{x^2}-\frac{x^4}{3}+o(x^5)-(\cancel{x^2}+o(x^4))}{x^4}$$

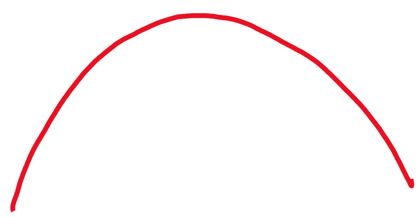
$$= \frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4} = \frac{-\frac{1}{3}+o(1)}{1} \longrightarrow -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2-\sin(x^2)}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

Convessità



← convessa

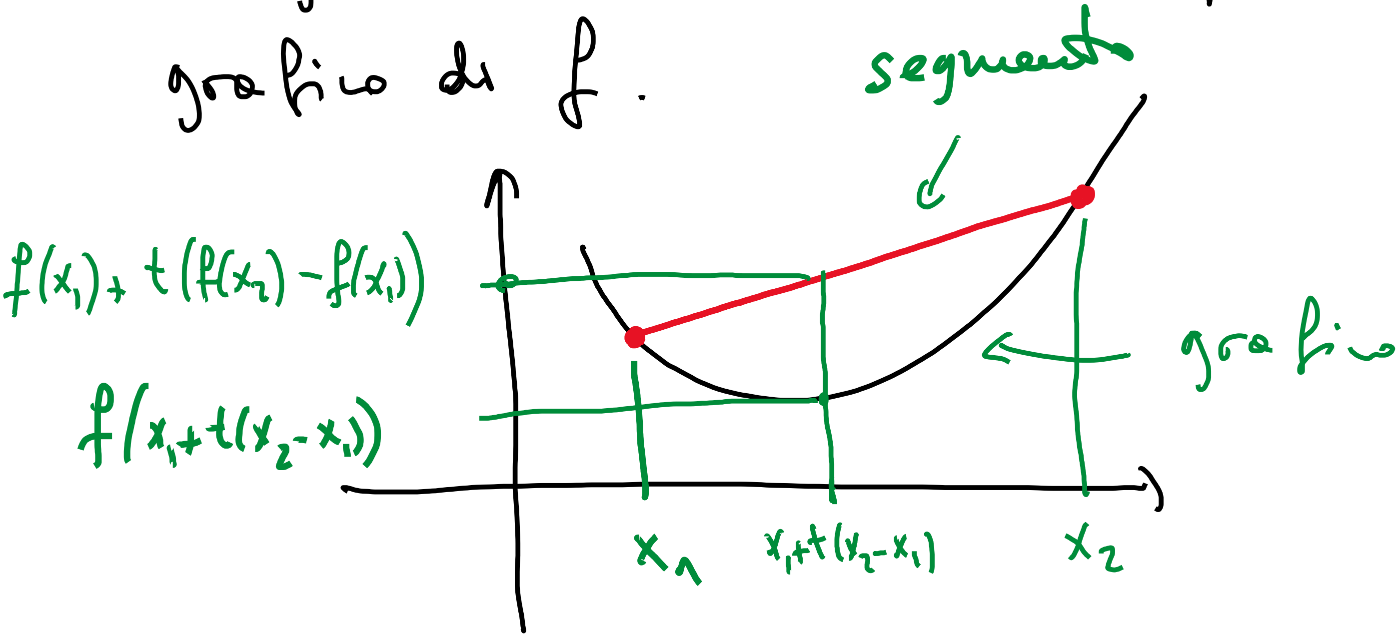


← concava

Def: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

f si dice convessa in I se, presi due punti qualsiasi sul grafico di f, il segmento che li unisce è sopra il grafico di f.



In formule:
f si dice convessa se $\forall\ x_1, x_2 \in I$ e $\forall\ t \in (0,1)$ risulta

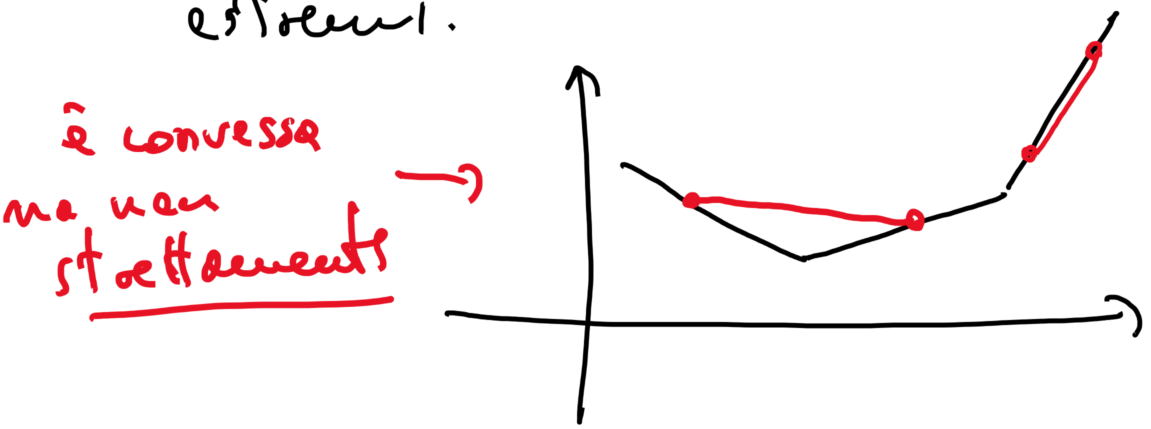
$$f(x_1+t(x_2-x_1)) \leq f(x_1)+t\left(f(x_2)-f(x_1)\right)$$

se vale il $<$ $\Rightarrow$ f si dice <u>strettamente convessa</u>.

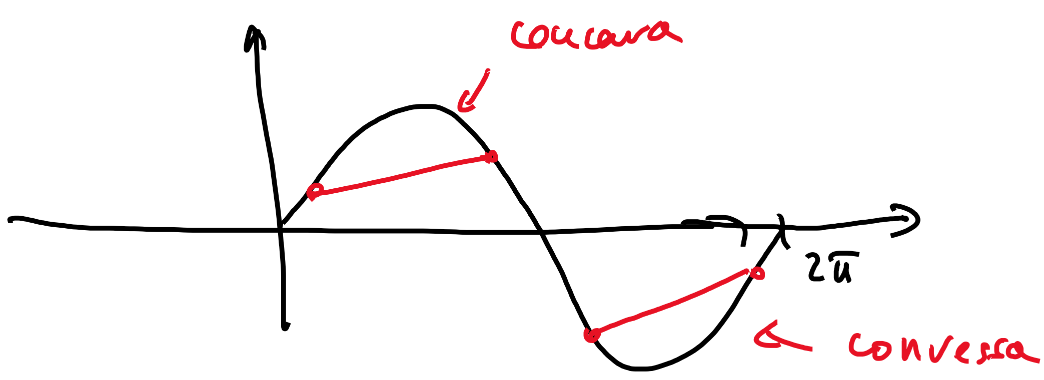
<u>Def</u>: f si dice <u>concava</u> se $-f$ è convessa.

Oss: una retta è contemporaneamente concava e convessa.
Tuttavia non è strettamente concava né strettamente convessa.

Se f è **strettamente** convessa, il segmento che unisce i due punti del grafico tocca il grafico **solo** negli estremi.



Es: $f(x) = \sin x$ $\quad f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$



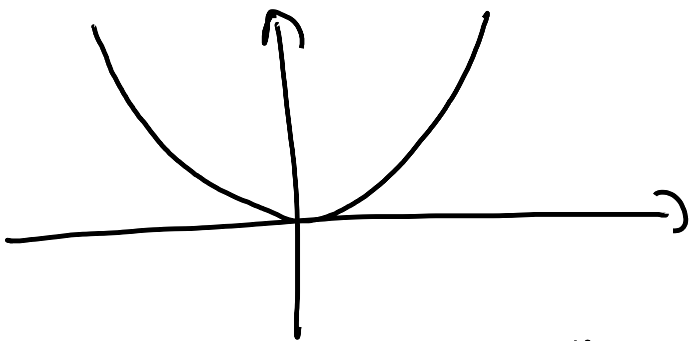
$\Rightarrow$ f non è né concava né convessa in $[0, 2\pi]$.

Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte. Sono equivalenti:

1) f è convessa
2) f' è debolmente crescente
3) $f'' \geq 0$.

Es: $f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2 > 0$

$\Rightarrow f$ è convessa ovunque.



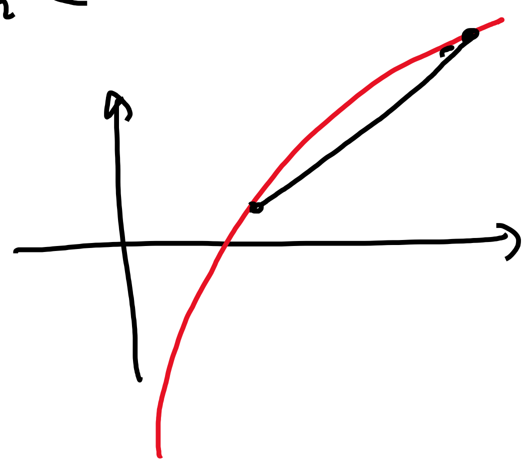
$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$

f è convessa.

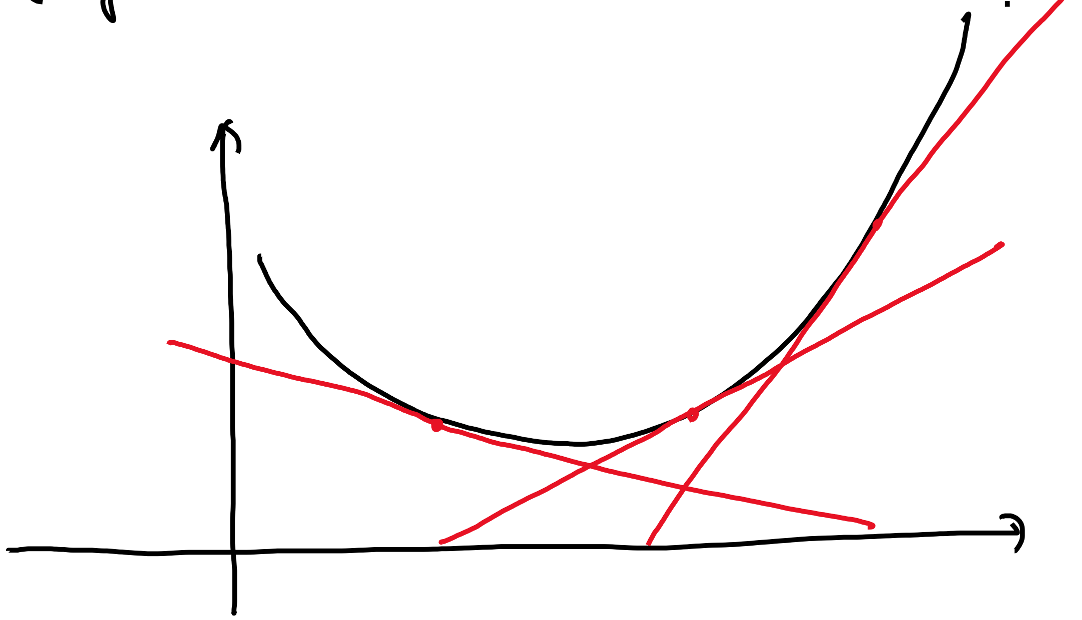
$f(x) = \log x$, $x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$\Rightarrow f$ è concava.



Cosa vuol dire geometricamente che f' è debolmente crescente?



Es: $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$ f'' cambia segno.

$f''(x) \leq 0$ se $x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow$ $\sin x$ è concava in $[0, \pi]$

$f''(x) \geq 0$ se $x \in [\pi, 2\pi]$

$\Rightarrow$ $\sin x$ è convessa in $[\pi, 2\pi]$