Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$ e continua in I.

1) Se $f'(x) \leq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \geq 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è punto di minimo locale per f.

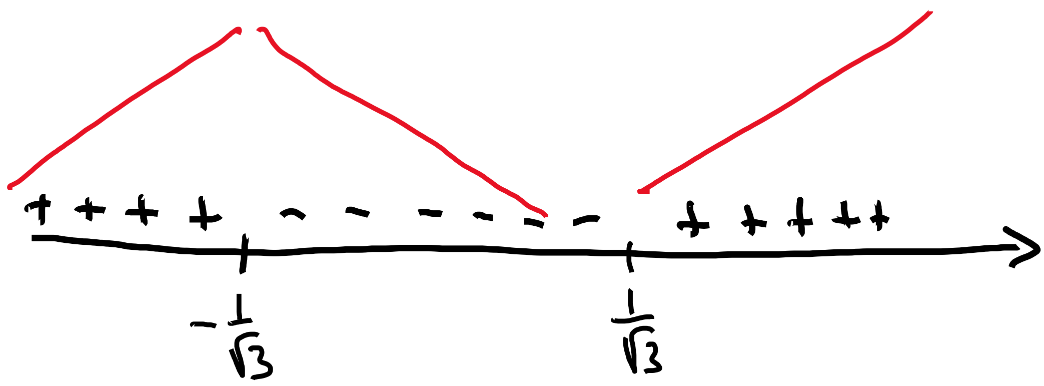
2) Se $f'(x) \geq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \leq 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è punto di massimo locale per f.

Es: $f(x) = x^3 - x$

$f'(x) = 3x^2 - 1$ segno di f'

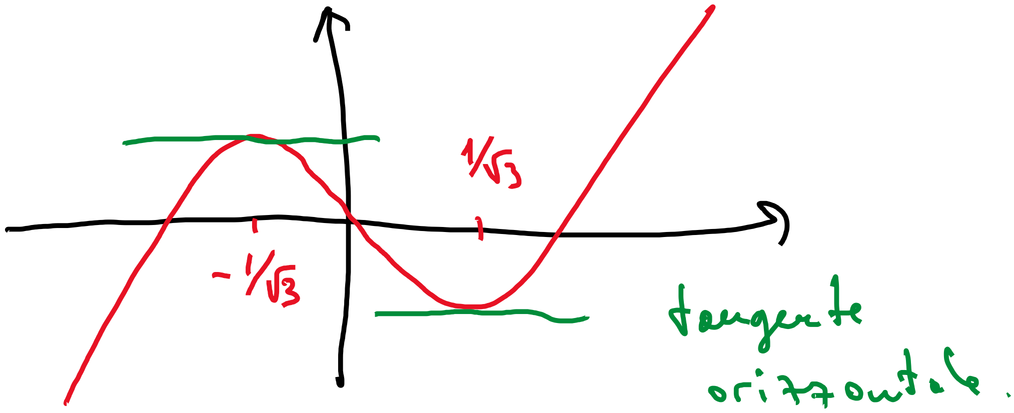
$3x^2 - 1 \geq 0 \iff 3x^2 \geq 1 \iff x^2 \geq \frac{1}{3}$

$|x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ cioè $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$



$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di max locale

$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di minimo locale.

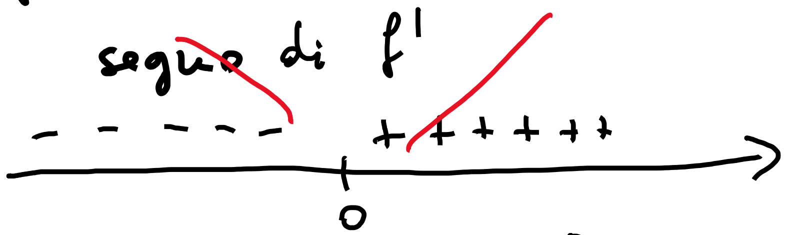


$$f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

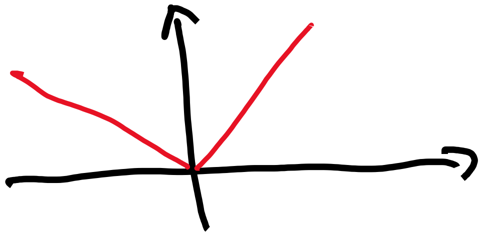
Es: dove f non è derivabile in x_0.

Es 1. $f(x) = |x|$ $\quad$ f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

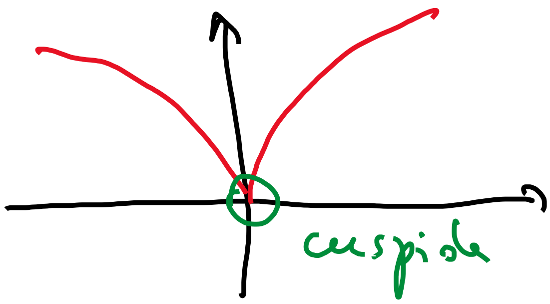
segno di f'



0 è punto di minimo locale



Es 2: $f(x) = \sqrt{|x|}$

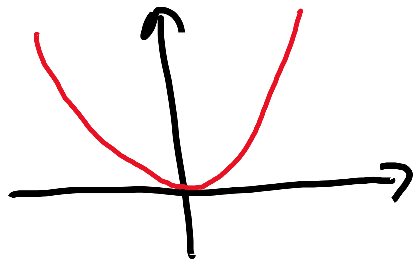


f non è derivabile in $x_0 = 0$ ma

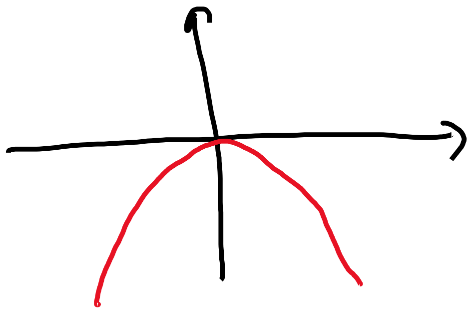
$f'(x) < 0 \ \forall x < 0$
$f'(x) > 0 \ \forall x > 0$ $\Rightarrow$ $x_0 = 0$ è punto di minimo locale

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$
f derivabile 2 volte in x_0 e $f'(x_0) = 0$.
Allora
1) se x_0 è punto di minimo locale $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$
2) se x_0 è punto di max locale $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$
3) se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è punto di minimo locale
4) se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è punto di max locale

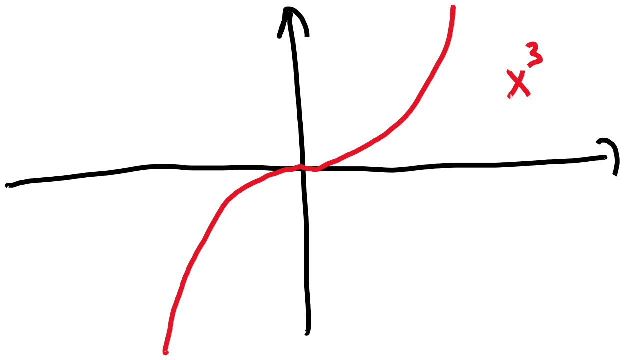
Es: $f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$ $\quad f''(x) = 2$
$f'(0) = 0$ $\quad f''(0) > 0 \Rightarrow x_0 = 0$ è di min locale



$g(x) = -x^2$ $\quad g'(x) = -2x$ $\quad g''(x) = -2$
$g'(0) = 0$ $\quad g''(0) < 0$ $\quad$ max locale

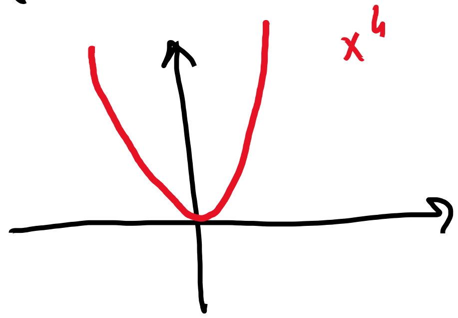


Es: se $f''(x_0) = 0$ non posso dire niente
$h(x) = x^3$ $\quad h'(x) = 3x^2$ $\quad h''(x) = 6x$
$h'(0) = 0$ $\quad h''(0) = 0$ $\quad$ e in questo caso
$x_0 = 0$ non è né di max né di min locale.



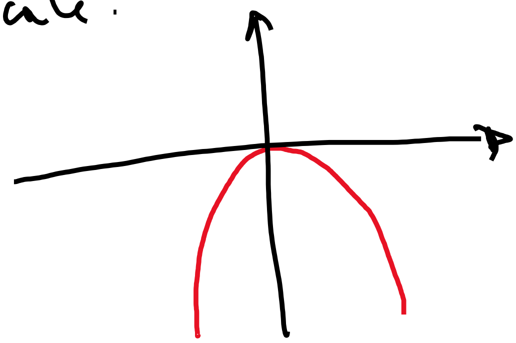
$f(x) = x^4 \qquad f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$

$f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ ma in questo caso $x_0 = 0$ è di minimo locale



$g(x) = -x^4 \qquad g'(x) = -4x^3 \qquad g''(x) = -12x^2$

$g'(0) = 0 \quad g''(0) = 0$ ma $x_0 = 0$ è di max locale.



Teorema di de l'Hôpital

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a,b).

Se valgono le condizioni:

1) $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ oppure $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

2) $g'(x) \neq 0$ in un intorno destro di a

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Vale anche per $\lim_{x \to b^-}$

Es: $\lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \frac{0}{0}$

f g

$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin x + 2x}{4x^3} = \frac{0}{0}$

uso ancora de l'Hôpital

$\lim_{x \to 0} \frac{-2\cos x + 2}{12x^2} = \frac{0}{0}$

vado avanti

$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x}{24x} = \frac{0}{0}$

vado avanti

$\lim_{x \to 0} \frac{2\cos x}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

Es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$

de l'Hôpital

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$

de l'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty.$$

Es: verificate sempre l'ipotesi 1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

se avessi usato de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2} \quad \text{sbagliato.}$$

Es: potrebbe esistere $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ma non quello $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \quad , \quad g(x) = x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \frac{0}{0}$$

de l'Hôpital

$$f' = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2x \sin\frac{1}{x}}^{\to 0} - \cos\frac{1}{x}}{1} \quad \nexists \leftarrow \text{non esiste}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x} = \lim_{y\to+\infty} \cos t \quad \text{non esiste}$$

Oss: se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (finito)

e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ non esiste allora

$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x)$ non esiste.

$$g(x) = (f+g)(x) - \underbrace{f(x)}_{\downarrow \ell}$$

se $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = m$ allora

$\lim_{x\to x_0} g(x) = m - \ell$ ed esisterebbe.

---

torniamo all'esempio $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$
$g(x) = x$

ho visto che $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

e invece

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

quindi se trovo che $\nexists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

non posso concludere che

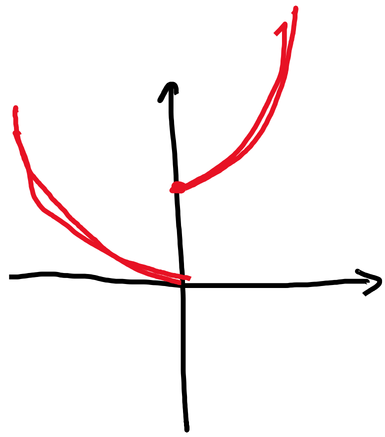
$\nexists \lim \frac{f(x)}{g(x)}$.

Corollario: Se f è continua in x_0 e derivabile in un intorno di x_0, eccetto al più x_0 (non richiedo la derivabilità in x_0) e se esiste

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora $f'(x_0) = l$.

Es: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



f è derivabile in $x=0$?
NO perché non è continua. Ma ...

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x = 0$$

quindi sembrerebbe derivabile.
Osserviamo che f non è continua quindi non si applica il corollario.

Oss: Anche se la funzione è continua non è la stessa cosa fare il limite della derivata o il limite del rapporto incrementale.

Es: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

è continua in $x=0$? sì

perché $\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \cdot \text{limitata} = 0 = f(0)$.

Se $x \neq 0$ calcolo f'

$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\nexists}\right) = \nexists$.

sbaglierei a concludere che f non è derivabile in $x=0$.

Infatti

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - \overbrace{0}^{f(0)}}{x} =$

$= \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f$ è derivabile in $x=0$.

Esempi di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{0^+}}}{0} = \frac{e^{-\infty}}{0} = \frac{0}{0}$$

de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}$$

è peggio dell'originale.

$$\frac{e^{-1/x}}{x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}} \to \frac{\infty}{\infty} \quad \text{per } x\to 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}} = \frac{\frac{1}{0^+}}{e^{\frac{1}{0^+}}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^{-3}}{e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{e^{1/x}\,x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{e^{1/x}\cdot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{e^{1/x}}$$

de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{x^2}}{e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{e^{1/x}} = \frac{2}{e^{\frac{1}{0^+}}} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Def: dato $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$

si chiama n fattoriale ed è il prodotto dei numeri interi da 1 a n.

per definizione si pone

$$0! = 1$$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = (1 \cdot 2 \cdot 3)\, 4 = 6 \cdot 4 = 24$

$5! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)\, 5 = 24 \cdot 5 = 120$

in generale

$$(n+1)! = n!\,(n+1)$$

infatti

$$(n+1)! = \underbrace{[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n]}_{n!}(n+1) = n!\,(n+1)$$

Formula di Taylor

Se f è derivabile in un punto x_0 allora

$$f(x) = \underbrace{\boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}}_{\text{retta tangente}} + \underbrace{\boxed{o(x-x_0)}}_{\text{"resto"}}$$

il "resto" è la differenza tra la funzione f e la sua retta tangente.

Come è fatto il resto?

Formula di Taylor con resto di Peano

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Se f è derivabile n-volte in x_0 e almeno $n-1$ volte in (a,b) allora esiste unico un polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ e una funzione $R_n(x)$ tali che

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

e $$R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$$

cioè $$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Il polinomio P_n è di questa forma

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 +$$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

si scrive anche così:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .$$

$R_n(x)$ si dice resto di Peano di ordine n

$P_n(x)$ si dice polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$=\underbrace{\boxed{\frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0}}_{k=0}+\underbrace{\boxed{\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1}}_{k=1}+$$

$$+\underbrace{\boxed{\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}}_{k=2}+\dots+$$

$$+\boxed{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}\leftarrow k=n$$

x_0 è fissato, quindi l'unica variabile è x quindi ottenete che $P_n(x)$ è un polinomio di grado $\leq n$.